Aufgabe 1)

Gegeben sei die Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \, : \, \frac{y^2}{2} - 2 \le x \le 4 - y^2 \right\}$$

a) Skizzieren Sie die Menge D und bestimmen Sie den Schwerpunkt von D bei homogener Dichte (Masse/Flächeneinheit) $\rho = 2$.

b) Sei $\mathbf{f}$ das Geschwindigkeitsfeld

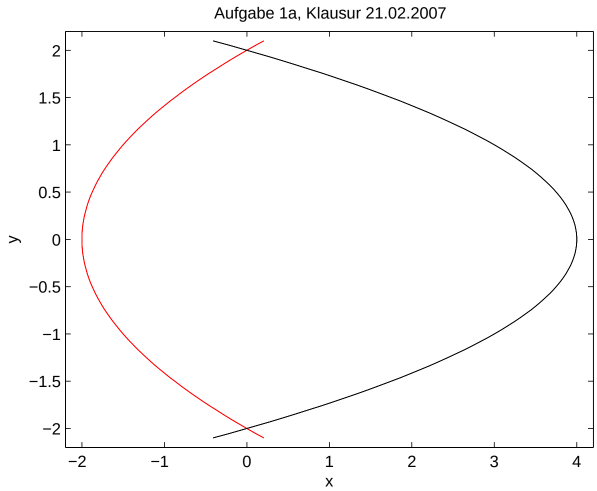
$$\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + e^{-y}\cos y \\ 2y + e^{-x}\sin x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluß von $\mathbf{f}$ durch den Rand der Menge D aus Teil a).

Lösung 1)

a) Wie man der Skizze entnimmt gilt

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \, : \, -2 \le y \le 2, \frac{y^2}{2} - 2 \le x \le 4 - y^2 \right\} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$



[1 Punkt]

Zur Berechnung des Schwerpunktes, rechnet man zunächst die Masse M aus.

$$M = \int_{-2}^{2} \int_{\frac{y^2}{2}-2}^{4-y^2} \rho \, dx \, dy = 2 \int_{-2}^{2} 4 - y^2 - \frac{y^2}{2} + 2 \, dy$$

$$= 2 \left[-\frac{y^3}{2} + 6y \right]_{-2}^{2} = 4(-4 + 12) = 32 \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Für die y–Komponente des Schwerpunktes gilt aus Symmetriegründen : $y_s = 0$. **[1 Punkt]**

Für die x–Komponente des Schwerpunktes erhält man

$$\begin{aligned}
x_s &= \frac{1}{M}\int_{-2}^{2}\int_{\frac{y^2}{2}-2}^{4-y^2} \rho\, x\, dx\, dy = \frac{1}{M}\int_{-2}^{2} 2\cdot\frac{1}{2}\left((4-y^2)^2 - \frac{(y^2-4)^2}{4}\right) dy \\
&= \frac{1}{16}\int_{-2}^{2}\frac{3}{8}\,(4-y^2)^2\, dy \;=\; \frac{3}{8\cdot 16}\left[16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_{-2}^{2} \\
&= \frac{3}{8\cdot 8}\,(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}) \;=\; \frac{3}{2} - 1 + \frac{3}{10} = \frac{4}{5}\,. \qquad \textbf{[2 Punkte]}
\end{aligned}$$

b) Der Fluß F ergibt sich nach dem Satz von Green:

$$\begin{aligned}
F &= \int_{-2}^{2}\int_{\frac{y^2}{2}-2}^{4-y^2} \textbf{div }\mathbf{f}(x,y)\, dx\, dy \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{\frac{y^2}{2}-2}^{4-y^2} 3\, dx\, dy = 48\,. \qquad \textbf{[3 Punkte]}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2)

Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) = x - 8y + z$$

auf dem Schnitt der beiden Kugeloberflächen

$$g(x,y,z) = x^2 + (y+4)^2 + z^2 - 25 = 0$$

und

$$h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0.$$

Hinweis:

- Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

Lösung:

Regularitätsbedingung :

$$J(g,h)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2(y+4) & 2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

aus

$$\alpha \begin{pmatrix} 2x \\ 2(y+4) \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \ \vee \ x = 0 \\ \alpha \neq 1 \ \wedge \ y = 4\alpha/(1-\alpha) \\ \alpha = 1 \ \vee \ z = 0 \end{cases}$$

folgt $x = z = 0$. Aus der ersten Nebenbedingung folgt dann $y = -4 \pm 5$ und aus der zweiten Nebenbedingung $y = \pm 3$. Es gibt also keine zulässigen Punkte mit $x = z = 0$. Die Regularitätsbedingung ist in allen zulässigen Punkten erfüllt. **[2 Punkte]**

Mit der Lagrange Funktion $F = f + \lambda g + \mu h$ erhält man als notwendige Bedingungen für Extrema folgendes System:

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda x + 2\mu x &= 0\,, \\ -8 + 2\lambda(y+4) + 2\mu y &= 0\,, \\ 1 + 2\lambda z + 2\mu z &= 0\,, \qquad\qquad \textbf{[2 Punkte]} \\ x^2 + (y+4)^2 + z^2 - 25 &= 0\,, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 9 &= 0\,. \end{aligned}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

$$(y+4)^2 - y^4 = 16 \iff 8y + 16 = 16 \iff \text{y} = 0\,.$$

Dies eingesetzt in die zweite Gleichung liefert $\lambda = 1$ und damit

$$\begin{aligned} 1 + 2x + 2\mu x &= 0\,, \\ 1 + 2z + 2\mu z &= 0\,, \\ x^2 + z^2 - 9 &= 0\,, \\ \lambda = 1\,, \qquad y &= 0\,. \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$2(1+\mu)(x-z) = 0 \iff \mu = -1 \text{ oder } x = z\,.$$

Setzt man $\mu = -1$ in die erste Gleichung ein, so erhält man $1 = 0$ also einen Widerspruch. Es kommt also nur $x = z$ in Frage. Einsetzen in die letzte Gleichung liefert die Kandidaten

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\,, \quad f(P_1) = 3\sqrt{2}\,, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\,, \quad f(P_2) = -3\sqrt{2}\,.$$

Rechnung : [**4 Punkte**]

Da der Schnitt der beiden Kugeloberflächen (leer, Punkt oder Kreisrand) eine kompakte Menge ist werden Minimum und Maximum der stetigen Funktion f angenommen. Vergleich der Funktionswerte zeigt, dass in P_1 das globale Maximum und in P_2 das globale Minimum liegt. [**1 Punkt**]