Aufgabe 1)

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades T_2 zur Funktion

$$f(x,y) = xy + \cos(x)\, e^y$$

mit dem Entwicklungspunkt $\mathbf{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und zeigen Sie, dass für alle

$$(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad |x| \leq 0.05\,, \ |y| \leq 0.2$$

die folgende Abschätzung gilt

$$|\, R_2\,(x,y;\mathbf{x_0})\,| := |\, f(x,y) - T_2\,(x,y;\mathbf{x_0})\,| \leq 0.1\,.$$

.

b) Bestimmen und klassifizieren Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) = y^2\, x^3 - 3y^2\, x + 12y\,.$$

Lösung 1)

a)

$$\begin{array}{ll}
f(x,y) = xy + \cos(x)\, e^y & f(0,0) = 1 \\
f_x(x,y) = y - \sin(x)e^y & f_x(0,0) = 0 \\
f_y(x,y) = x + \cos(x)e^y & f_y(0,0) = 1 \\
f_{xx}(x,y) = -\cos(x)e^y & f_{xx}(0,0) = -1 \\
f_{xy}(x,y) = 1 - \sin(x)e^y & f_{xy}(0,0) = 1 \\
f_{yy}(x,y) = \cos(x)e^y & f_y(0,0) = 1
\end{array}$$

$$T_2(x,y) = 1 + y + \frac{1}{2}\,(y^2 + 2xy - x^2)$$

Dieses Ergebnis kann auch durch Einsetzen der Cosinus bzw. Exponentialreihe hergeleitet werden. Für die Fehlerabschätzung benötigen wir eine Schranke für die Beträge der dritten Ableitungen von f. Diese sind alle von der Form $(\pm \sin(x)\, bzw \pm \cos(x)) \cdot e^y$. Damit folgt

$$|\text{ dritte Ableitungen }| < e^{0,2} < \sqrt{e} < \sqrt{4} = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}, |y| < 0.2.$$

und

$$|\, R_2\,(x,y;\mathbf{x_0})\,| \leq \frac{2^3}{3!}\,(0.2)^3 \cdot 2 = \frac{8 \cdot 8}{3000} = \frac{64}{300} \cdot \frac{1}{10} < \frac{1}{10}\,.$$

b)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) = y^2\,x^3 \;-\; 3y^2\,x \;+\; 12y\,.$$

$f_x(x,y) = 3x^2y^2 - 3y^2 = 0 \iff y = 0 \vee x = \pm 1\,.$

$f_y(x,y) = 2yx^3 - 6xy + 12$

Wegen $f_y(x,0) = 12 \neq 0$ kommt für stationäre Punkte nur $x = \pm 1$ in Frage.

Für $x = 1$ muss gelten
$f_y(1,y) = 2y - 6y + 12 = 0$
also $y = 3$ und damit $\qquad P_1 = (1,3)^T\,.$

Analog erhält man für $x = -1$
$f_y(-1,y) = -2y + 6y + 12 = 0$
also $y = -3$ und damit $\qquad P_2 = (1,3)^T\,.$

Zur Klassifikation bestimmt man die Hessematrizen in den stationären Punkten P_1 und P_2:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy^2 & 6y(x^2-1) \\ 6y(x^2-1) & 2x^3 - 6x \end{pmatrix} \qquad Hf(\pm 1, \pm 3) = \begin{pmatrix} \pm 54 & 0 \\ 0 & \pm(-4) \end{pmatrix}$$

Es liegt je ein positiver und ein negativer Eigenwert vor. Es handelt sich also bei beiden Punkten um Sattelpunkte.

Aufgabe 2)

a) Sei C der positiv orientierte Rand der Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

Berechnen Sie $\int_C \mathbf{f}(x,y)\, d(x,y)$ für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x^2+1) - \dfrac{y^3}{3} \\ \dfrac{x^3}{3} + \arctan(e^{-y}) \end{pmatrix}$$

b) Gegeben sei das Kraftfeld

$$\mathbf{K}(x,y,z) := (2x + yz\,,\, 2y + zx\,,\, 2z + xy\,)^T.$$

Berechnen Sie die Arbeit, die aufgewendet werden muss., um einen Massenpunkt entlang der Kurve

$$c(t) = \left(\sin(t)\,,\, 1 - \cos^2(t)\,,\, \tan\left(\frac{t}{2}\right) \right)^T \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

von $A = (0,0,0)^T$ nach $B = (1,1,1)$ zu bewegen.

Lösung 2)

a) Da f selbst nicht sehr integrierfreundlich aussieht, dafür aber

$$\operatorname{rot} f(x,y) = x^2 + y^2$$

verwendet man den Satz von Green und erhält

$$I := \int_{\delta D} f(x,y) ds = \int_D x^2 + y^2\, d(x,y)$$

bergang zu Polarkoordinaten liefert

$$I = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r d\phi\, dr = 2\pi \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^2 = 8\pi.$$

b) Wir prüfen zunächst, ob das Kraftfeld

$$\mathbf{K}(x,y,z) := (2x + yz\,,\, 2y + zx\,,\, 2z + xy\,)^T$$

ein Potential Φ besitzt, und zwar konstruktiv:

$\Phi_x = f_1 = 2x + yz \implies \Phi(x,y,z) = x^2 + xyz + g(y,z)$

$$\Phi_y = xz + g_y = f_2 = 2y + zx \implies g(y,z) = y^2 + h(z),$$
$$\implies \Phi(x,y,z) = x^2 + xyz + y^2 + h(z)$$

$$\Phi_z = xy + h_z = f_3 = 2z + xy \implies h(z) = z^2 + C$$

Durch $\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$ ist also ein Potential von f gegeben. Fr die aufgewendete Arbeit gilt damit

$$A = -\phi(c(0)) + \Phi(c(\pi/2)) = \phi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4.$$