Aufgabe 1)

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades T_2 zur Funktion

$$f(x,y) = xy + \cos(x)\, e^y$$

mit dem Entwicklungspunkt $\mathbf{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und zeigen Sie, dass für alle

$$(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad |x| \leq 0.05\,,\ |y| \leq 0.2$$

die folgende Abschätzung gilt

$$|\, R_2\,(x,y;\mathbf{x_0})\,| := |\, f(x,y) - T_2\,(x,y;\mathbf{x_0})\,| \leq 0.1\,.$$

.

b) Bestimmen und klassifizieren Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) = y^2\,x^3 - 3y^2\,x + 12y\,.$$

Aufgabe 2)

a) Sei C der positiv orientierte Rand der Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

Berechnen Sie $\int_C \mathbf{f}(x,y)\, d(x,y)$ für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x^2+1) - \dfrac{y^3}{3} \\ \dfrac{x^3}{3} + \arctan(e^{-y}) \end{pmatrix}$$

b) Gegeben sei das Kraftfeld

$$\mathbf{K}(x,y,z) := (2x + yz\,, 2y + zx\,, 2z + xy\,)^T.$$

Berechnen Sie die Arbeit, die aufgewendet werden muss., um einen Massenpunkt entlang der Kurve

$$c(t) = \left(\sin(t)\,, 1 - \cos^2(t)\,, \tan\left(\frac{t}{2}\right) \right)^T \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

von $A = (0,0,0)^T$ nach $B = (1,1,1)^T$ zu bewegen.