

## Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 6

#### Aufgabe 1:

- a) Sei  $K$  die Einheitskugel im  $\mathbb{R}^3$ .

$$K := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Berechnen Sie

$$\int_K (y^2 - x^2) d(x, y, z)$$

*Hinweis* :  $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ .

- b) Die Punkte  $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ , welche die folgenden Ungleichungen erfüllen, bilden ein beschränktes Gebiet  $G$ :

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad y \leq \cos(x), \quad y \geq \max \left\{ (-2x - \pi), \left( \frac{2}{3}x - \frac{\pi}{3} \right) \right\}$$

Berechnen Sie die  $x$ -Komponente des Schwerpunktes von  $G$  bei konstanter Dichte (Masse/Flächeneinheit)  $\rho(x, y) = 1$ .

#### Aufgabe 2: Gegeben sei eine Platte in Form eines Parallelogramms:

$$P = \{(x, y)^T, -2 \leq y - x \leq 1, -3 \leq y + 3x \leq 1\}$$

Die Platte habe die Dichte  $\rho = 2$ .

Berechnen Sie das Trägheitsmoment von  $P$  bzgl. der  $x$ -Achse. Verwenden Sie dazu den Transformationssatz mit  $u = y - x$  und  $v = y + 3x$ .

#### Aufgabe 3:

- a) Gegeben sei die halbe Ellipsoid-Schale

$$\frac{16}{25} \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq 1, \quad z \leq 0$$

mit der Massendichte  $\rho(x, y, z) = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2}$ .

Bestimmen Sie den Schwerpunkt.

b) Gegeben seien  $M \subset \mathbb{R}^2$

$$M = \left\{ (x, y)^T \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

und

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M, \sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq 2+x^2+y^2 \right\}$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt von  $K$  bei homogener Massenverteilung.

**Aufgabe 4:** Bestimmen Sie die Potentiale der folgenden Vektorfelder  $f_i$  mit den Definitionsgebieten  $D_i$ , sofern diese (Potentiale) existieren.

$$f_1 = (xe^{xy}, ye^{xy}, 1]^T, \quad D_1 = \mathbb{R}^3,$$

$$f_2 = (ye^{xy}, xe^{xy}, 1]^T, \quad D_2 = \mathbb{R}^3$$

$$f_3 = \frac{1}{x^2+y^2} (-x, y)^T, \quad D_3 = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$$

$$f_4 = (y \cos(z) + yz, x \cos(z) + xz + 2y, -xy \sin(z) + xy + 1]^T, \quad D_4 = \mathbb{R}^3$$

**Abgabetermine:** 22.01. – 26.01.2007