Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2006/07**
Prof. Dr. Jens Struckmeier
Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 1: [Klausur 02/03, Prof. Struckmeier]

Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) = xy + z^2$$

auf dem Schnitt der Zylinderoberfläche

$$g(x,y,z) \;=\; x^2 + y^2 - 8 \;=\; 0$$

mit der Ebene

$$h(x,y,z) \;=\; x - y + 2z - 1 \;=\; 0.$$

Hinweis: Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

Aufgabe 2: [Klausur 04/05, Prof. Oberle]

Gegeben sei das Extremalproblem

$$f(x,y) \;=\; x^2 \;+\; y^2 \;=\; \text{min!}$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) \;=\; e^{x-1} - \arctan(y+1) - 1 \;=0.$$

a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{x}_0 = (1,-1)^T$ ein stationärer Punkt der Lagrange–Funktion F ist, und überprüfen Sie die Regularitätsbedingung im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,-1)^T$.

b) Untersuchen Sie den stationären Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,-1)^T$ auf seinen Typ hin. Stellen Sie dazu die Hesse–Matrix $HF(\boldsymbol{x}_0)$ auf, und überprüfen Sie deren Definitheit auf dem Tangentialraum $Tg(\boldsymbol{x}_0)$.

Aufgabe 3: Beschreiben Sie folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ als (Vereinigung von) Normalbereiche(n) und skizzieren Sie diese.

Hinweis : Es genügt eine grobe Skizze per Hand.

$$M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\, x \geq 0 \right\}$$

$$M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| + |y| \leq 2,\, y \geq -1 \right\}$$

$$M_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1,\, x, y, z \geq 0 \right\}$$

$$M_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x| \leq 1,\, |y| \leq 1,\, 0 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2 \right\}$$

Aufgabe 4: Berechnen Sie folgende Integrale.

a)

$$\int\int_{D_1} xy^2 d(x,y) \quad \text{mit } D_1 = [-1, 3] \times [1, 2]$$

b)

$$\int\int_{D_2} (x^2 - y^2) d(x,y) \quad \text{mit } D_2 = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 1\}$$

c)

$$\int\int_{D_3} xy \cos(xy) d(x,y) \quad \text{mit } D_3 = \{(x,y) : -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, -y \leq x \leq y\}$$

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrien der Funktionen aus!

Abgabetermine: 08.01. – 12.01.2007

Das Mathe III Team wünscht Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und ein gutes neues Jahr 2007 !