Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2006/07**
Prof. Dr. Jens Struckmeier
Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 1:

Gegeben seien die folgenden Geschwindigkeitsfelder $\boldsymbol{u} = (u(x,y), v(x,y))^{\mathrm{T}}$ einiger zweidimensionaler Strömungen

a) $u = 0, \quad v = 2x,$ **b)** $u = \dfrac{y}{2}, \quad v = -2x,$ **c)** $u = -2y, \quad v = 2x.$

Berechnen Sie die Quelldichte $\operatorname{div} \boldsymbol{u}$ und die Wirbeldichte $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} := v_x - u_y$. Skizzieren Sie die Vektorfelder und einige zugehörige Stromlinien (das sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = u,\ \dot{y} = v$ bzw. der Differentialgleichung $y'(x) = v(x,y)/u(x,y)$).

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei das von einem Parameter $\alpha > 0$ abhängige Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{f}(x,y) := \left(\frac{-y}{r^{2\alpha}}, \frac{x}{r^{2\alpha}} \right)^{\mathrm{T}}, \qquad r^2 := x^2 + y^2 .$$

Wie sehen die zugehörigen Stromlinien aus?

Für welche Parameter α ist das Vektorfeld quellenfrei ($\operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$)?

Gibt es ein α, so dass $\boldsymbol{f}$ wirbelfrei ($\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$) wird?

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x^2 + y + 4z,\ y^2 + 2z + 5x,\ z^2 + 3x + 6y)^{\mathrm{T}}.$$

Berechnen Sie die Ausdrücke

$$\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{f}) \qquad \text{bzw.} \qquad \nabla(\operatorname{rot} \boldsymbol{f}) \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{f}),$$

falls diese definiert sind. Einer der Ausdrücke verschwindet für die vorgegebene Funktion f identisch. Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass dieser Ausdruck nicht für beliebige f identisch verschwinded.

c) Beweisen Sie folgende Produktregel für C^2–Funktionen $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\operatorname{div}(\phi \cdot \boldsymbol{f}) = \phi \operatorname{div} \boldsymbol{f} + < \nabla\phi, \boldsymbol{f} > .$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Jacobi–Matrizen folgender Funktionen und deren Determinanten.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix} \end{cases} \qquad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2r\cos\phi \\ 3r\sin\phi \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \end{cases} \qquad f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2r\cos\phi\cos\theta \\ 3r\sin\phi\cos\theta \\ 4r\sin\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & f_5 = \Phi \circ g \\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 & \Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad g,\, \Phi\ C^2 - \text{Funktionen} \\ g(t) = \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix} & \Phi : \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} \mapsto \Phi(t, y) \end{cases}$$

Hinweis : Kettenregel!!

Aufgabe 4:

Es sei $f(x, y) = y^2\,(x-1) + x^2\,(x+1)$ aus Aufgabe 1d) Blatt 1.

a) Skizzieren Sie bzw. plotten Sie (z. B. mit MATLAB contour(x,y,z,[c c])) die Höhenlinien von f, die durch die Punkte $P_1 = (-1, 1)^T$ bzw. $P_2 = (0.5, 0)^T$ gehen.

b) Bestimmen Sie in den Punkten P_1 und P_2 die Richtungsableitung von f, für die beiden durch

$$v = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegebenen Richtungen.

c) Sind die Richtungen aus b) in P_1 bzw. P_2 Anstiegs-, Abstiegs- oder Tangentialrichtungen?

d) Versuchen Sie festzustellen, ob v im Punkt $P_0 = (0, 0)^T$ eine Anstiegs– oder Abstiegsrichtung ist.

Abgabetermine: 13.11. – 17.11.2006