Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ f(x, y) = 3x - 5y$ die Richtungsableitung in $(2, 1)$ in den beiden durch die Gerade $3x + 2y - 1 = 0$ gegebenen Richtungen.

b) Für die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0$$

(i) bestimme man im Nullpunkt die partiellen Ableitungen und die Richtungsableitungen ∂_h in jeder Richtung $h = (h_1, h_2)$.

(ii) Ist f in $(0, 0)$ differenzierbar?

(iii) Man berechne die Geraden durch (0,0,0), die als Steigung die Richtungsableitung haben und zeige, dass diese Geraden auf der Fläche $z = f(x, y)$ liegen.

(iv) Man zeige, dass f in $(0, 0)$ stetig ist.
(Hinweise: nicht rechnen, denken, (iii) und Folgenstetigkeit).

(v) freiwillig: 1 Sonderpunkt: Man zeichne die Fläche in einer Umgebung des Nullpunktes. Empfehlung: Matlabfiles *meshgrid, meshc.*

Aufgabe 6:

Gegeben seien die folgenden Geschwindigkeitsfelder $\boldsymbol{u} = (u(x, y), v(x, y))^T$ einiger zweidimensionaler Strömungen (mit $r := \sqrt{x^2 + y^2} > 0$)

a)	laminar, translatorisch	:	$u = c,$	$v = 0$
b)	laminare Gegenströmung	:	$u = c\,y,$	$v = 0$
c)	laminare Rohrströmung	:	$u = c\,(1 - y^2),$	$v = 0$ mit $\lvert y\rvert \le 1$
d)	rotierend	:	$u = -\omega\, y,$	$v = \omega\, x$
e)	isolierter Wirbel	:	$u = -\mu\, y/r^2,$	$v = \mu\, x/r^2$
f)	isolierte Quelle	:	$u = \epsilon\, x/r^2,$	$v = \epsilon\, y/r^2$

Berechnen Sie die Quelldichte $\operatorname{div} u$ und die Wirbeldichte $\operatorname{rot} u := v_x - u_y$. Bei zweidimensionalen Feldern wird die 3. Komponente $= 0$ gesetzt. Skizzieren Sie die Vektorfelder und einige zugehörige Stromlinien (das sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = u,\ \dot{y} = v$ bzw. der Differentialgleichung $y' = v/u$).

Aufgabe 7:
Verwenden Sie die Kettenregel zur Berechnung der Jacobi-Matrix für die folgenden Funktionen $z = f(u, v)$:

a) $z = 8x^2y - 2x + 3y, \quad x = uv, \quad y = u - v\,;$

b) $z = xy\varphi, \quad x = e^{uv}, \quad y = \sin u, \quad \varphi = u^2 v\,;$

c) $z = \begin{pmatrix} xy \\ \varphi^2\, x \end{pmatrix}, \quad x = uv, \quad y = 1, \quad \varphi = v \cos u\,.$

Aufgabe 8:
Durch $x = r\cos 2\phi\,,\ y = r \sin 2\phi\,,\ z = \tilde{z} + \tilde{z}^3$ sei eine Koordinatentransformation gegeben. Berechnen Sie die Darstellung des Laplace–Operators in diesen Koordinaten, und wenden Sie ihn auf die Funktion $f(r, \phi, \tilde{z}) = r(\tilde{z} + \tilde{z}^3)\cos\phi$ an.

Abgabetermin: 10.11.-15.11.2003 (zu Beginn der Übung)