Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2002/03**
Prof. Dr. Jens Struckmeier
Dipl.-Math. Christian Becker

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7

Aufgabe 1:

a) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ und E der Ellipsoid

$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \right\}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Transformationssatzes

$$\mathrm{vol}(E) = a \cdot b \cdot c \cdot \mathrm{vol}(K),$$

wobei $\mathrm{vol}(K)$ das Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Koordinatentransformation aus Aufgabe 1 a) und des Gaußschen Satzes den Fluß des Vektorfeldes $F(x, y, z) = \left(\frac{x^3}{a^2}, \frac{y^3}{b^2}, \frac{z^3}{c^2}\right)$ durch die Oberfläche des Ellipsoiden E.

Aufgabe 2:

a) Prüfen Sie, welche der folgenden Vektorfelder $F_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Potentiale besitzen und geben Sie gegebenenfalls ein Potential an.

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= (-y, x) \\ F_2(x, y) &= (x, y) \\ F_3(x, y) &= (x^3, y^3) \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C F_3(x, y) d(x, y)$$

für die Kurve

$$c(t) = \left(t(t-4) \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right), t \right); \quad t \in [0, 4].$$

c) Besitzt das Vektorfeld

$$F_4 \colon \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R} \right\} \to \mathbb{R}^3$$

$$F_4(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z \right)$$

ein Potential?

d) Berechnen Sie

$$\oint_C F_4(x,y,z)d(x,y,z)$$

entlang des Kreises

$$c(t) = \big(\cos(t), \sin(t), 0\big) \quad t \in [0, 2\pi].$$

Aufgabe 3:

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der durch folgende Parametrisierung gegebenen Fläche:

$$\Psi\colon [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$(\vartheta,\varphi) \mapsto \big((R + r\cos\vartheta)\cos\varphi, (R + r\cos\vartheta)\sin\varphi, r\sin\vartheta\big)$$

wobei $R, r \in \mathbb{R}_+$ und $R > r$.

Wie sieht die Fläche aus?

b) Zieht man aus einer Seifenlauge mit zwei Ringen eine Seifenhaut, so nimmt die entstehende Fläche eine Form an, die die Oberflächenspannung minimiert. Aus der Theorie der sogenannen Minimalflächen ist bekannt, dass diese Fläche als Rotationsfläche der Funktion cosh dargestellt werden kann:

$$M = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; x^2 + y^2 = (\cosh z)^2, z \in [z_1, z_2] \Big\}$$

Geben Sie eine Parametrisierung der Fläche an und berechnen Sie den Flächeninhalt für $z_1 = \ln 2$, $z_2 = \ln 3$. Skizzieren Sie die Fläche.

Hinweis: Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine stetig differenzierbare Funktion. Die Rotationsfläche $\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big| x^2 + y^2 = f(z)^2\big\}$ besitzt die Parametrisierung

$$\Psi\colon [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$(\varphi, z) \mapsto (f(z)\cos\varphi, f(z)\sin\varphi, z)$$

Aufgabe 4:

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Satzes den Fluß des Vektorfeldes $F(x,y,z) = (-y, x, z)$ durch die Oberfläche des Kugeloktanten

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \text{ und } x,y,z \ge 0\}.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_K (y^2 - x^2)\, d(x,y,z)$$

wobei K die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

c) Gegeben sei das Kraftfeld

$$k(x,y,z) := (4y + 2xy^3, 4x + 3x^2y^2 + 2yz^2, 2y^2z).$$

Berechnen Sie die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt von $A := (0,0,0)$ nach $B := (1,1,1)$ zu bewegen.

d) (Stokes: freiwillig) Bestimmen Sie das Kurvenintegral

$$\int\limits_C f(x,y,z)d(x,y,z)$$

wobei $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2 + 2xy \\ x^2 + 2yz \\ y^2 \end{pmatrix}$ sei. Die Kurve c bezeichne den Schnitt des Zylindermantels $x^2 + y^2 = 4$ mit der Ebene $x + z = 2$.

Abgabetermine: 03.02.-07.02.2003