Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2002/03**
Prof. Dr. Jens Struckmeier
Sebastian Rudert

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 1:
Gegeben sei die schiefe Pyramide P mit Grundfläche $G = [0;3] \times [0;4]$, deren höchster Punkt über $(2,1)$ liegt und die Höhe 1 besitzt.

a) Geben Sie die Funktion $h : G \to \mathbb{R}$ an, welche dem Punkt (x,y) die Höhe der Pyramide an der Stelle (x,y) zuordnet.

b) Bestimmen Sie das Volumen V der Pyramide P durch Integration von h.

c) Berechnen Sie V mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips! Berechnen Sie dazu den Flächeninhalt $A(h)$ der Niveaufläche von P zur Höhe h und integrieren Sie $A(h)$ nach h.

Aufgabe 2:
Wie auf Blatt 4 sei

a) $f : D_f \to \mathbb{R}, \ (x,y) \to x^2 - y^2, \ D_f = \{(x,y) : |x| + |y| \le 1\}$

b) $g : D_g \to \mathbb{R}, \ (x,y) \to 2x^3 - 3xy^2, \ D_g = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$

Berechnen Sie

$$\int\int_{D_f} f(x,y)d(x,y) \quad \text{und} \quad \int\int_{D_g} g(x,y)d(x,y) .$$

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrien der Funktionen aus!

Aufgabe 3:
Die Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, welche die folgenden Ungleichungen erfüllen, bilden ein beschränktes Gebiet G:

$$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad y \le \cos(x), \quad y \ge \max\left\{(-2x-\pi), \left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt von G bei konstanter Massenverteilung $\rho(x,y) = 1$.

Aufgabe 4:

Die *Lemniskate* L ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$\left(x^2+y^2\right)^2 - x^2 + y^2 \;=\; 0.$$

Wir erinnern uns daran, dass L die Ebene in drei Zusammenhangskomponenten zerlegt, von denen genau eine unbeschränkt ist. Diese nennen wir D.
Welche der folgenden Flächen sind Normalbereiche? Geben Sie ggf. eine Zerlegung in Normalbereiche an!

a) D_f und D_g aus Aufgabe 2.

b) $\mathbb{R}^2 \setminus D$, d.h. das mengentheoretische Komplement von D in der Ebene.

c) Der Abschluss von $D \cap D_g$, (d.h. $L \cup (D \cap D_g)$).

Abgabetermine: 20.01-24.01.2003