Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2002/03**
Prof. Dr. Jens Struckmeier
Dr. Peywand Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 1:

a) Skizzieren Sie Höhenliniendiagramme für die Funktionen:

(i) $g(x,y) = |x| + |y|$

(ii) $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$

(iii) $h(x,y) = \ln(1 + x^2 y^4)$

b) Skizzieren Sie die Niveaufläche (Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit konstantem Funktionswert, analog Höhenlinie im $\mathbb{R}^2$) der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 - 2$ zum Niveauwert 2 .

Aufgabe 2:
Es sei $f(x,y) = x^2 \cos(x+y)$.

a) Bestimmen Sie in den Punkten $P_1 = (\frac{\pi}{2}, 0)$ und $P_2 = (\pi, 0)$ die Richtungsableitung von f , für die beiden durch die Gerade $8x - 6y = 1$ gegebenen Richtungen v und $-v$.

b) Sind die Richtungen aus a) in P_1 bzw. P_2 Anstiegs- Abstiegs- oder Tangentialrichtungen?

c) Die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion $g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ im Punkt $(x^0, y^0) \in D$ lautet:

$$z = g(x^0, y^0) + g_x(x^0, y^0)(x - x^0) + g_y(x^0, y^0)(y - y^0)$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt P_1 .

Aufgabe 3:

Gegeben seien $a := (0,0)^T$ und $h = (1,1)^T$ sowie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = \frac{1}{10}\left(e^x y, xe^{-y}\right)^T$.

a) Zeigen Sie, dass es kein $\theta \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$f(a+h) - f(a) = Jf(a+\theta h)h.$$

b) Überprüfen Sie, ob f auf $[-1,1] \times [-1,1]$ eine kontrahierende Selbstabbildung ist.

c) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(\ln(2), 1)$ zwei Schritte des Fixpunktverfahrens durch.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie eine polynomiale Approximation der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\boldsymbol{x}) = \sin(x_1+x_2)+\cos(x_1+\sin(x_2))$, die für alle (x_1, x_2) mit $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq 0.1$ betragsmässig höchstens um 0.01 von f abweicht.

Hinweis: Berechnen Sie für die Fehlerabschätzung keine zusätzlichen Ableitungen. Schätzen Sie die Beträge der benötigten Ableitungen ab!

Abgabetermine: 25.11.-29.11.2002