Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. K. Rothe

WS 2001/2002

A n a l y s i s III

2. Übung

Aufgabe 5:

Gegeben seien die folgenden Geschwindigkeitsfelder $\boldsymbol{u} = (u(x,y), v(x,y))^{\mathrm{T}}$ einiger zweidimensionaler Strömungen (mit $r := \sqrt{x^2+y^2} > 0$)

a)	laminar, translatorisch	:	$u = c,$	$v = 0$
b)	laminare Gegenströmung	:	$u = c\,y,$	$v = 0$
c)	laminare Rohrströmung	:	$u = c\,(1-y^2),$	$v = 0$ mit $\lvert y\rvert \le 1$
d)	rotierend	:	$u = -\omega\,y,$	$v = \omega\,x$
e)	isolierter Wirbel	:	$u = -\mu\,y/r^2,$	$v = \mu\,x/r^2$
f)	isolierte Quelle	:	$u = \epsilon\,x/r^2,$	$v = \epsilon\,y/r^2$

Berechnen Sie die Quelldichte $\operatorname{div}\boldsymbol{u}$ und die Wirbeldichte $\operatorname{rot}\boldsymbol{u} := v_x - u_y$. Skizzieren Sie die Vektorfelder und einige zugehörige Stromlinien (das sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = u,\ \dot{y} = v$ bzw. der Differentialgleichung $y' = v/u$).

Aufgabe 6:

a) Ein C^1–Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *wirbelfrei*, falls $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, und *quellenfrei*, falls $\operatorname{div}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$, für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

Für welche Parameter λ ist das folgende Vektorfeld wirbelfrei?

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \;:=\; (\lambda\,x\,y \,-\, z^3,\ (\lambda-2)\,x^2,\ (1-\lambda)\,x\,z^2)^{\mathrm{T}}$$

Gibt es eine λ, so dass $\boldsymbol{f}$ quellenfrei wird?

b) Bestätigen Sie, dass für C^2–Funktionen $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ folgende Differentiationsregeln gelten:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{F}) \;=\; 0, \quad \operatorname{rot}(\nabla f) \;=\; \boldsymbol{0}.$$

Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel, dass im Allg. *nicht* $\nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{0}$ gilt.

Aufgabe 7:

a) Geben Sie den (maximalen) Definitionsbereich der Funktion $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \supset D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\boldsymbol{F}(x,y,z) := (x^2 - z^2,\ e^{x\,y},\ \ln[(x+z)^3])^{\mathrm{T}}$ an.

   Berechnen Sie die JACOBI–Matrix $\boldsymbol{JF}(x,y,z)$. Für welche Punkte $\boldsymbol{x} \in D$ verschwindet die Funktionaldeterminante $\det(\boldsymbol{JF}(\boldsymbol{x}))$?

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die JACOBI–Matrizen der folgenden Funktionen $z = f(x,y)$

   (i) $\quad z = 8\,u^2 v - 2\,u + 3\,v, \quad u = x\,y, \quad v = x - y;$

   (ii) $\quad z = u\,v\,w, \quad u = e^{x\,y}, \quad v = \sin x, \quad w = x^2 y.$

Aufgabe 8:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(\boldsymbol{x}) := -x^2 - 2\,y^2 + 2\,x + z.$

a) Bestimmen Sie die Niveaufläche $N_{\boldsymbol{x}^0}$ der Funktion f im Punkt $\boldsymbol{x}^0 = (1,1,10)^{\mathrm{T}}$. Von welchem Typ ist diese Quadrik?

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}^0)$ für $\boldsymbol{v} = (0,1,0)^{\mathrm{T}}$ und für $\boldsymbol{v} = 1/\sqrt{2}\,(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$. Für welche $\boldsymbol{v}$ mit $\|\boldsymbol{v}\| = 1$ wird $D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}^0)$ am Größten bzw. am Kleinsten?

Abgabetermine: 12.11. – 16.11.2001 **vor** der Übung.

Die Übungen am Do. 15.11 in der Zeit 11.00 - 13.00 Uhr fallen aus. Bitte nehmen sie Ersatztermine war.