Kapitel 10: Periodische Funktionen, Fourier–Reihen

10.1 Grundlegende Begriffe

Periodische Funktionen

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) heißt **periodisch mit der Periode** T, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(t+T) = f(t)$$

Hauptresultat dieses Kapitels:
Entwicklung einer periodischen Funktion in eine **Fourier–Reihe**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right]$$

Grundschwingungen: $\cos(\omega t),\ \sin(\omega t)$
Oberschwingungen: $\cos(k\omega t),\ \sin(k\omega t)$, $k = 2, 3, \ldots$

Bemerkungen:

1) Ist T eine Periode von $f(t)$, so auch kT, $k \in \mathbb{Z}$, eine Periode.
   Sind T_1 und T_2 Perioden, so ist auch $k_1T_1 + k_2T_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, eine Periode.
   Man sagt: Die Menge aller Perioden bildet einen $\mathbb{Z}$–Modul.

2) Existiert eine kleinste positive Periode $T > 0$, so ist die Menge der Perioden gegeben durch kT, $k \in \mathbb{Z}$. Jede nichtkonstante, stetige und periodische Funktion besitzt eine solche kleinste Periode.

3) Sind $f(t)$ und $g(t)$ T–periodisch, so ist auch $\alpha f + \beta g$ T–periodisch.

4) Ist $f(t)$ T–periodisch und integrierbar (über kompakten Intervallen), so gilt für beliebige $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_a^{a+T} f(t)\,dt$$

Definition: Eine Funktion $g(t)$, $t \in [0, T]$ bzw. $t \in [0, T/2]$ läßt sich zu einer T–periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortsetzen. Gebräuchlich sind dabei die folgenden Vorgehensweisen:

1) **Direkte Fortsetzung:**

$$f(t) := g(t - kT), \quad kT \leq t < (k+1)T$$

2) **Gerade Fortsetzung:** Sei $g(t)$ auf $[0, T/2]$ gegeben:

$$f(t) := g(t - kT), \quad \left(\frac{2k-1}{2}\right) T \leq t < \left(\frac{2k+1}{2}\right) T$$

wobei g zunächst an der y–Achse gespiegelt wird:

$$g(t) := g(-t), \quad -\frac{T}{2} \leq t < 0$$

3) **Ungerade Fortsetzung:** Wie bei 2), aber Spiegelung am Ursprung:

$$g(t) := -g(-t), \quad -\frac{T}{2} \leq t < 0$$

Definition:

1) Eine Reihe der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ heißt **Fourier–Reihe** (oder **trigonometrische Reihe**); dabei sei $\omega = \dfrac{2\pi}{T} > 0$.

2) Die zugehörigen Partialsummen

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

heißen **trigonometrische Polynome**.

Komplexe Schreibweise der Fourier–Reihe:

Formel von Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \\ \sin x &= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \end{aligned}$$

Trigonometrische Polynome:

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

Fourier–Reihe:

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

Umrechnung der Koeffizienten a_k, b_k und γ_k:

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k}{2}\left(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}\right) + \frac{b_k}{2i}\left(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}\right)\right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t}\right] \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}a_0 \quad \gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \quad \gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

$$a_0 = 2\gamma_0 \quad a_k = \gamma_k + \gamma_{-k} \quad b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k})$$

Satz:

1) Die Funktionen $e^{ik\omega t}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, bilden ein Orthonormalsystem bezüglich des Skalarprodukts:

$$\langle u, v \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T \overline{u(t)} v(t)\, dt$$

2) Konvergiert die Fourier–Reihe

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

auf $[0, T]$ **gleichmäßig** gegen eine Funktion $f(t)$, so ist diese stetig und es gilt:

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Bemerkung:

1) Reelle Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(l\omega t)\, dt = \begin{cases} 0 & : \ k \neq l \\ T/2 & : \ k = l \neq 0 \\ T & : \ k = l = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(l\omega t)\, dt = \begin{cases} 0 & : \ k \neq l \\ T/2 & : \ k = l \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(l\omega t)\, dt = 0$$

Bemerkung:

2) Reelle Fourier–Koeffizienten:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t)\, dt \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t)\, dt, \quad k > 0$$

10.2 Fourier–Reihen

Definition:

1) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt **stückweise stetig** bzw. **stückweise stetig differenzierbar**, falls $f(t)$ bis auf endlich viele Stellen $t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ in $[a, b]$ stetig bzw. stetig differenzierbar ist und in diesen Ausnahmepunkten die einseitigen Grenzwerte vn $f(t)$ und $f'(t)$ existieren.

Definition: (Fortsetzung)

2) Für eine stückweise stetige Funktion $f : [0, T] \to \mathbb{C}$ werden die **Fourier–Koeffizienten von** $f(t)$ definiert durch:

$$\gamma_k := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t}\, dt, k \in \mathbb{Z}$$

$$a_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t)\, dt \quad k \geq 0$$

$$b_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t)\, dt, \quad k > 0$$

Dabei ist $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz.

Definition: (Fortsetzung)

3) Die mit den obigen Koeffizienten gebildete Reihe

$$F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

heißt die **Fourier–Reihe** von $f(t)$.

Bei der Definition verwendet man die **direkte Fortsetzung** der Funktion $f : [0, T] \to \mathbb{C}$ zu einer T–periodischen Funktion.

Satz: Sei $f(t)$ eine stückweise stetige, T–periodische Funktion.

$$f(t) \text{ gerade } \Rightarrow \; a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t)\, dt \quad \wedge \quad b_k = 0$$

$$f(t) \text{ ungerade } \Rightarrow \; a_k = 0 \quad \wedge \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t)\, dt$$

Beispiel: Die Sägezahnfunktion:

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \; t = 0, t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \; 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Funktion ist ungerade, also gilt (beachte $\omega = 1$):

$$a_k = 0 \quad \wedge \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2} \sin(kt)\, dt = \frac{1}{k}$$

Damit lautet die Fourier–Reihe:

$$S(t) \sim \sin t + \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \ldots$$

Approximation der Sägezahnfunktion durch 10. Partialsumme

$$S_{10}(t) = \sum_{k=1}^{10} \frac{\sin(kt)}{k}$$

Beispiel: Die Rechteckschwingung:

$$R(t) := \begin{cases} 0 & : \ t = 0, t = \pi, t = 2\pi \\ 1 & : \ 0 < t < \pi \\ -1 & : \ \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Funktion ist ungerade, also gilt:

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \\ b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kt)\, dt = \begin{cases} 0 & : \ k \text{ gerade} \\ \dfrac{4}{k\pi} & : \ k \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Fourier–Reihe lautet daher:

$$R(t) \sim \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \ldots\right)$$

Beispiel: Sei $f(t) = t^2$, $-\pi < t < \pi$ mit 2π–periodischer Fortsetzung.

Die Funktion ist gerade, damit folgt

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos(kt)\, dt = \begin{cases} \dfrac{2\pi^2}{3} & : \ k = 0 \\ (-1)^k \dfrac{4}{k^2} & : \ k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Damit ergibt sich als Fourier–Reihe

$$f(t) \sim \frac{\pi^2}{3} - \frac{4\cos t}{1^2} + \frac{4\cos(2t)}{2^2} - + \ldots$$

Rechenregeln für Fourier–Reihen:

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, T–periodisch mit

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}, \qquad g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k e^{ik\omega t}$$

1) **Linearität**

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha\gamma_k + \beta\delta_k) e^{ik\omega t}$$

2) **Konjugation**

$$\overline{f(t)} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_{-k} e^{ik\omega t}$$

3) **Zeitumkehr**

$$f(-t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{-k} e^{ik\omega t}$$

Rechenregeln für Fourier–Reihen: (Fortsetzung)

4) **Streckung**

$$f(ct) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik(c\omega)t}$$

5) **Verschiebung**

$$f(t+a) \;\sim\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\gamma_k e^{ik\omega a}\right) e^{ik\omega t}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$e^{in\omega t} f(t) \;\sim\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{k-n} e^{ik\omega t}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Rechenregeln für Fourier–Reihen: (Fortsetzung)

6) **Ableitung**
Ist $f(t)$ stetig und stückweise differenzierbar, so gilt:

$$\begin{aligned} f'(t) &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik\omega\gamma_k)e^{ik\omega t} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \omega k(b_k \cos(k\omega t) - a_k \sin(k\omega t)) \end{aligned}$$

7) **Integration**
Gilt $a_0 = \gamma_0 = \int_0^T f(t)dt = 0$, so folgt:

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \sim -\frac{1}{T}\int_0^T tf(t)\, dt - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b_k}{k\omega} \cos(k\omega t) - \frac{a_k}{k\omega} \sin(k\omega t)\right)$$

Satz: (Konvergenzsatz)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T–periodisch, stückweise stetig differenzierbar.
Betrachte die zugehörige Fourier–Reihe

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

1) Die Reihe konvergiert punktweise und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F_f(t) = \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)$$

2) In allen kompakten Intervallen $[a, b]$, in denen $f(t)$ stetig ist, ist die Konvergenz gleichmäßig.

Bemerkung:

Stetigkeit von $f(t)$ reicht für die Konvergenz der Fourier–Reihe nicht aus.

Beispiel: Die Sägezahnfunktion

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \ t = 0, t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \ 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Fehlerfunktion: Definiere für $0 < t < 2\pi$

$$R_n(t) := \frac{1}{2}(t-\pi) + \sin t + \frac{\sin(2t)}{2} + \ldots + \frac{\sin(nt)}{n}$$

Es gilt:

$$1 + 2\cos t + \ldots + 2\cos(nt) = \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{\sin(t/2)}$$

Integration:

$$\int_\pi^t \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{\sin(t/2)}\, dt = (t-\pi) + 2\sin t + 2\frac{\sin(2t)}{2} + \ldots + 2\frac{\sin(nt)}{n}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} R_n(t) &= \int_\pi^t \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{2\sin(t/2)}\, dt \\ &\overset{\text{p.I.}}{=} \frac{-\cos\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{(2n+1)\sin(t/2)} + \frac{1}{2n+1}\int_\pi^t \cos\left((n+\frac{1}{2})\tau\right)\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\sin(\tau/2)}\right) d\tau \\ &\overset{\text{MWS}}{=} \frac{-\cos\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{(2n+1)\sin(t/2)} + \frac{\cos\left[(n+\frac{1}{2})\bar{t}\right]}{(2n+1)}\left(\frac{1}{\sin(t/2)} - 1\right) \end{aligned}$$

und daher

$$|R_n(t)| \leq \frac{2}{(2n+1)\sin(t/2)}$$

Ist $t \in (0, 2\pi)$ fest, so gilt:

$$|R_n(t)| \to 0 \qquad t \to \infty$$

Satz: **(Approximationsgüte)**

1) **Approximation im quadratischen Mittel**

   Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine T–periodische, stückweise stetige Funktion, und seien

$$S_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right)$$

   die Partialsummen der zugehörigen Fourier–Reihen.
   Für den Teilraum von $C(\mathbb{R})$ der trigonometrischen Polynome

$$T_n := \text{Spann } \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega t), \ldots, \cos(n\omega t), \sin(\omega t), \ldots, \sin(n\omega t)\right\}$$

   mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle = \frac{2}{T}\int_0^T \overline{u(t)}v(t)\,dt$$

Satz: (Fortsetzung)

1) gilt dann

$$\forall\, \phi \in T_n \ : \ \|f - S_n\| \leq \|f - \phi\|$$

   d.h. $S_n(t)$ ist von allen Funktionen aus dem Teilraum T_n die beste Approximation von $f(t)$ im quadratischen Mittel.

2) Es gilt die **Besselsche Ungleichung**

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \leq \frac{2}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt$$

   Hieraus folgt insbesondere die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$$

Satz: (Fortsetzung)

2) und damit auch (**Riemannsches Lemma**)

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} |b_k|$$

Bemerkung:

Unter geeigneten Bedingungen an $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ lassen sich die Koeffizienten γ_k der Fourier–Reihe abschätzen:

$$|\gamma_k| \le \frac{C}{k^{m+1}}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Beispiel: Rechteckschwingung

$$F_f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \ldots\right)$$

Die Koeffizienten γ_k konvergieren mit $1/k$ gegen Null!

Bemerkung: Für $n \to \infty$ geht die Besselsche Ungleichung in Gleichheit über, i.e.

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{2}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt$$

Diese Beziehung nennt man die **Parsevalsche Gleichung**.

Beispiel: Wieder Rechteckschwingung

Es gilt

$$\frac{2}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = 2$$

und da $a_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 = \frac{16}{\pi^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) = \frac{16}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{8} = 2$$