8.5 Uneigentliche Integrale

Integrale über unbeschränkte Bereiche

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \qquad \int_{\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Integrale über unbeschränkte Funktionen mit Singularitäten am Rand

$$\int_a^b f(x)\,dx,\ f:(a,b]\to\mathbb{R}\text{ stetig},\ f:[a,b)\to\mathbb{R}\text{ stetig}$$

Lokale Integrierbarkeit:

Definition: Eine Funktion $f:D\to\mathbb{R}$ mit $D\subset\mathbb{R}$ heißt **lokal integrierbar**, falls sie über jedem kompakten Intervall $[a,b]\subset D$ integrierbar ist.

Ist $f(x)$ lokal integrierbar, so kann man folgende Grenzwerte betrachten:

$$a\to\infty \qquad b\to\infty$$

Definition: Ist eine Funktion lokal integrierbar, so definiert man

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx := \lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

Bemerkung: Der **Cauchysche Hauptwert** ist definiert als

$$\text{CHW}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{x\to\infty}\int_{-x}^{x} f(x)\,dx$$

und im Allgemeinen **nicht identisch** mit obigem Integral!

Definition: Die Funktion $f(x)$ sei lokal integrierbar über $(a,b]$ bzw. $[a,b)$ oder (a,b). Dann definiert man

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{x\to a+} \int_x^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Bemerkung: Der **Cauchysche Hauptwert** ist definiert als

$$\text{CHW} \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right)$$

Beispiel:

1) Wegen

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{x^{\alpha-1}} + C & : \quad \alpha > 1 \\ \ln|x| + C & : \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha = 1$.

2) Folgendes uneigentliche Integral besitzt den Wert 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2}\,dx$$

Satz: **(Konvergenzkriterien)**

Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar.

1) Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ existiert genau dann, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists C > a \ : \ \forall z_1, z_2 > C \ : \ \left| \int_{z_1}^{z_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

2) Ist das uneigentliche Integral absolut konvergent, d.h. das uneigentliche Integral $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergiert, so konvergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Satz: **(Konvergenzkriterien)**

3) **Majorantenkriterium**

$$\forall x \ : \ |f(x)| \le g(x) \ \wedge \ \int_a^\infty g(x)\,dx \quad \text{konvergent}$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{absolut konvergent}$$

4) Weiter gilt folgende Umkehrung:

$$\forall x \ : \ 0 \le g(x) \le f(x) \ \wedge \ \int_a^\infty g(x)\,dx \quad \text{divergent}$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{divergent}$$

Beispiele:

1) Das sogenannte **Dirichlet–Integral**

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$$

ist konvergent:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin t}{t}\,dt = -\frac{\cos t}{t}\Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

und damit

$$\left|\int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \le \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{2}{z_1} \to 0 \quad (z_1 \to \infty)$$

Das Dirichlet–Integral besitzt den Wert $\pi/2$.

Beispiele:

2) Das **Exponentialintegral**

$$\mathrm{Ei}(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt \qquad (x < 0)$$

ist für alle $x < 0$ absolut konvergent.

3) Die **Gamma–Funktion** $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

Die Gamma–Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad x > 0$$

und es gilt

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

8.6 Parameterabhängige Integrale

Beispiel: Die Gamma–Funktion von der letzten Folie

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty f(x,t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

Zunächst: Parameterabhängige eigentliche Integrale
Sei $f : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, sodass f für festes $x \in I$ als Funktion von y integrierbar über $[a,b]$ ist:

$$F(x) := \int_a^b f(x,y)\,dy$$

Fragen:

1) Ist die Funktion $F(x)$ **stetig**, wenn $f(x,y)$ stetig ist?
2) Ist die Funktion $F(x)$ **differenzierbar**, wenn $f(x,y)$ nach der Variablen x differenzierbar ist?

Satz: **(Stetigkeit parameterabhängiger Integrale)**

Ist $f(x,y)$ stetig auf $I \times [a,b]$, so existiert das Integral

$$F(x) := \int_a^b f(x,y)\,dy$$

für alle $x \in I$, und $F(x)$ ist stetig auf I.

Satz: **(Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale)**

Ist $f(x,y)$ stetig und nach x stetig (partiell) differenzierbar, so ist auch $F(x)$ auf dem Intervall stetig differenzierbar (mit eventuell einseitigen Ableitungen an den Rändern von I), und es gilt:

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$

Beispiel:

1)

$$F(x) = \int_1^\pi \frac{\sin(tx)}{t}\,dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \int_1^\pi \cos(tx)\,dt$$

2) Die **Bessel–Funktion**:

$$J_n(x) \;:=\; \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)\,dt \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

$$J_n'(x) \;=\; -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t\cdot\sin(x\sin t - nt)\,dt$$

Die Bessel–Funktion $J_n(x)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0$$

Parameterabhängige **uneigentliche** Integrale:

$$F(x) := \int_a^\infty f(x,y)\,dy$$

Beispiel: Die Gamma–Funktion von oben

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

Definition:

Das Integral $\int_a^\infty f(x,y)\,dy$, $x \in I$ heißt **gleichmäßig konvergent**, falls es zu $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C > a$ gibt, sodass gilt:

$$\forall\, x \in I \;:\; \forall\, y_1, y_2 \geq C \;:\; \left| \int_{y_1}^{y_2} f(x,y) \right| dy < \varepsilon$$

Bemerkung: Majorantenkriterium:

$$\forall\, x \in I \;\;:\;\; |f(x,y)| \le g(y) \;\wedge\; \int_a^\infty g(y)\,dy \quad \text{konvergent}$$

$$\Rightarrow \qquad \int_a^\infty f(x,y)\,dy, \quad x \in I \quad \text{gleichmäßig konvergent.}$$

Das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy$$

konvergiert gleichmäßig (und absolut), falls $f(x,y)$ eine gleichmäßige Majorante besitzt.

Satz: Ist $f(x,y)$ stetig, nach x stetig (partiell) differenzierbar und sind die Integrale

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy \quad \text{und} \quad \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$

auf kompakten Teilmengen von I gleichmäßg konvergent, so ist auch $F(x)$ stetig differenzierbar, und die Ableitung läßt sich durch Differentiation unter dem Integralzeichen gewinnen:

$$F'(x) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$

Beispiel:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt \quad \Rightarrow \quad \Gamma'(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \cdot \ln t\,dt$$