**Beispiele:**

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C \qquad (a \neq 0)$$

$$\int b^{x}\,dx = \frac{1}{\ln b}b^{x} + C \qquad (b > 0, x > 0)$$

$$\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C \qquad (x > 0)$$

$$\int \log_b x\,dx = \frac{x}{\ln b}(\ln x - 1) + C \qquad (b > 0, x > 0)$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$



**Satz:** (Integrationsregeln)

1) **Linearität:**
   Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, so gilt

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

2) **Partielle Integration:**
   Sind $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

   und für die bestimmten Integrale folgt:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

**Satz:** (Integrationsregeln)

3) **Substitutionsregel:**
Ist $h:[a,b]\to[c,d]$ stetig differenzierbar und $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion $F(x)$, so gilt:

$$\int f(h(t))h'(t)\,dt = F(h(t))$$

Bei bestimmten Integralen erhalten wir demnach:

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(h(t))h'(t)\,dt &= \int\limits_{h(a)}^{h(b)} f(x)\,dx\\ &= F(h(b)) - F(h(a))\end{aligned}$$

**Beweis:** 1): Integration ist linearer Operator, 2): Produktregel,
3): Kettenregel.



**Beispiele:**

1) Wir berechnen (Linearität):

$$\int (28x^3 + 12x^2 - 2x + 3)\,dx = 7x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + C$$

2) Partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= xe^x - \int e^x\,dx\\ &= (x-1)e^x + C\end{aligned}$$

3) Partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= \int 1\cdot\ln x\,dx\\ &= x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= x(\ln x - 1) + C\end{aligned}$$

**Beispiele:**

4) Partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x\,dx &= \int \sin x \cdot \sin x\,dx \\
&= \sin x(-\cos x) + \int \cos^2 x\,dx \\
&= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx \\
\Rightarrow \quad 2\int \sin^2 x\,dx &= -\sin x \cos x + x + C \\
\Rightarrow \quad \int \sin^2 x\,dx &= \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C
\end{aligned}$$



**Beispiele:**

5) Substitution $x = h(t) = a\cos t$ beim Integral

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx = \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}(-a\sin t)\,dt$$

denn

$$dx = -a\sin t\;dt \quad h(0) = a \quad h(\pi) = -a$$

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx &= \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-a\sin t)\,dt \\
&= a\int_{0}^{\pi} \sin^2 t\,dt \\
&= a(t - \sin t\cos t)\,\Big|_0^{\pi} = \frac{a\pi}{2}
\end{aligned}$$

6) Substitution $x = h(t) = t^2, t \geq 0$ beim Integral

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^t\,2t\,dt$$

denn

$$h'(t) = 2t$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}}\,dx &= \int e^t\,2t\,dt \\ &= 2(t-1)e^t + C \\ &= 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C \end{aligned}$$



**Wichtige Beobachtung:**

Nicht jedes Integral läßt sich **explizit** lösen,
d.h. die Stammfunktion ist nicht immer durch elementare Funktionen darstellbar.

**Beispiele:**

$$\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad \text{(Integralsinus)}$$

$$\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad \text{(Fehlerfunktion)}$$

$$\mathrm{E}(x,k) := \int_0^x (1-k^2\sin^2 t)^{\pm\frac{1}{2}}\,dt \qquad \text{(Elliptische Integrale)}$$

**Satz:** **(Mittelwertsatz der Integralrechnung)**

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $p(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b p(x)\,dx$$

**Beweis:** Da $f(x)$ stetig und $p(x) \geq 0$ folgt:

$$\min(f[a,b]) \cdot p(x) \leq f(x)p(x) \leq \max(f[a,b]) \cdot p(x)$$

Integration liefert:

$$\min(f[a,b]) \cdot \int_a^b p(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)p(x)\,dx \leq \max(f[a,b]) \cdot \int_a^b p(x)\,dx$$

Behauptung folgt dann aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen.



**Bemerkung:**

Für den Spezialfall $p(x) = 1$ gibt es damit ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b-a)$$

Schreibt man diese Beziehung als

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a)$$

mit der Stammfunktion $F(x)$, so folgt

$$\exists\ \xi \in [a,b] \quad : \quad F'(\xi) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung für die Stammfunktion $F(x)$.

**Bemerkung:** Taylor–Entwicklung mittels **partieller Integration**:

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^0 f'(t)\,dt \\
&= (x-x_0)f'(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^1 f''(t)\,dt \\
&\vdots \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt
\end{aligned}
$$

Restgliedformel nach Lagrange aus Mittelwertsatz:

$$
\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}
$$