## Kapitel 8: Integration

Erläuterung auf Folie

### 8.1 Das bestimmte Integral

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine **beschränkte** Funktion auf einem (zunächst) kompakten Intervall $[a,b]$.

**Definition:** 1) Eine Menge der Form

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

nennt man eine **Zerlegung (Partition, Unterteilung)** des Intervalls $[a,b]$.
Die **Feinheit** der Zerlegung ist dabei

$$\|Z\| = \max_{1\le i\le n} (x_i - x_{i-1})$$

Man bezeichnet mit $\mathbf{Z}$ bzw. $\mathbf{Z}[a,b]$ die Menge aller Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$.



**Definition:** 2) Jede Summe der Form

$$R_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad (x_i \le \xi_i \le x_{i+1})$$

nennt man eine **Riemannsche Summe** der Zerlegung $Z$,

$$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf f([x_i, x_{i+1}])\,(x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die **Untersumme** von $f(x)$ zur Zerlegung $Z$,

$$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup f([x_i, x_{i+1}])\,(x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die **Untersumme** von $f(x)$ zur Zerlegung $Z$.

**Beobachtung:**

Aus den Definitionen folgt direkt:

1) Für **feste** Zerlegungen gilt stets:

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

2) Ist $Z_1$ eine **feinere** Zerlegung als $Z_2$, i.e. $Z_2 \subset Z_1$, so gilt:

$$U_f(Z_2) \leq U_f(Z_1) \qquad O_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

3) Für zwei **beliebige** Zerlegungen $Z_1$ und $Z_2$ gilt daher:

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

und

$$U_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$



**Konsequenzen:**

1) Es existieren die Grenzwerte über immer feinere Zerlegungen:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \;\; := \;\; \sup\{U_f(Z) \;:\; Z \in \mathbf{Z}[a,b]\} \qquad \textbf{(Unterintegral)}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \;\; := \;\; \inf\{O_f(Z) \;:\; Z \in \mathbf{Z}[a,b]\} \qquad \textbf{(Oberintegral)}$$

2) Eine Funktion $f(x)$ heißt **(Riemann–) integrierbar** über $[a,b]$, falls Unter– und Oberintegral übereinstimmen:

$$\int_a^b f(x)dx := \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

nennt man das **(Riemann–) Integral von** $f(x)$ **über** $[a,b]$.

**Beispiele:** 1) Die konstante Funktion $f(x) = c$ **ist integrierbar**:

$$U_f(Z) = O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} c\,(x_{i+1} - x_i) = c\,(b-a) \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx = c\,(b-a)$$

2) Sei $f(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$ und $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}$:

$$U_f(Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \left( \frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

$$O_f(Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \left( \frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$$



**Beispiele:**

3) Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \; x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & : \; x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann gilt für **jede** Zerlegung: $U_f(Z) = 0$, $O_f(Z) = 1$.

Also ist die Funktion **nicht** integrierbar.

4) Sei $a \leq c \leq b$ und $f(x)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \; x \neq c \\ 1 & : \; x = c \end{cases}$$

Die Funktion ist integrierbar mit $\int_a^b f(x)dx = 0$, denn

$$U_f(Z) = 0 \qquad 0 < O_f(Z) < 2\|Z\|$$

**Satz:** Seien $f(x)$ und $g(x)$ integrierbar auf $[a,b]$. Dann gelten:

1) $f$ ist integrierbar auf $[a,b] \;\Leftrightarrow\; f$ integrierbar auf $[a,c]$ und $[c,b]$.
Zusätzlich gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

2) **Linearität**: Auch $\alpha f(x) + \beta g(x)$ ist integrierbar:

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx$$

3) **Positivität**:

$$\forall\, x \in [a,b] \;:\; f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$$



**Satz:** (Fortsetzung)

4) **Abschätzungen**:

$$(b-a)\cdot \inf(f[a,b]) \;\leq\; \int\limits_a^b f(x)dx \;\leq\; (b-a)\cdot \sup(f[a,b])$$

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \;\leq\; (b-a)\cdot \sup\{|f(x)| \;:\; a \leq x \leq b\}$$

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \;\leq\; \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

Bei der letzten Abschätzung muß $|f(x)|$ integrierbar sein.

**Bemerkungen:**

1) Die erste Aussage gilt für beliebige Anordnungen von $a, b, c$.
   Man definiert daher
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
   sowie
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2) Ist $f(x)$ integrierbar, so gilt stets
$$R_f(Z_m) \to \int_a^b f(x)dx$$
   sofern $\|Z_m\| \to 0$ für $m \to \infty$.



## 8.2 Kriterien für Integrierbarkeit

**Satz:** (Riemannsches Kriterium)
Für eine **beschränkte** Funktion $f(x), a \leq x \leq b$, sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) $f(x)$ ist integrierbar über $[a, b]$.

2) $\forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists \ Z \in \mathbf{Z}[a, b] \quad : \quad O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon$

**Satz:**
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt:

1) Ist $f(x)$ **monoton**, so ist $f(x)$ integrierbar.

2) Ist $f(x)$ **stetig**, so ist $f(x)$ integrierbar.

**Beweis zu 2):**
Die Funktion ist stetig auf $[a, b]$, also auch gleichmäßig stetig, da $[a, b]$ kompakt.
Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ passend, so dass

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Dann gilt für eine Zerlegung $Z$ mit $\|Z\| < \delta$:

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{j=0}^{n-1} (\sup f[x_j, x_{j+1}] - \inf f[x_j, x_{j+1}])(x_{j+1} - x_j) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\varepsilon}{b - a}\right) \cdot (x_{j+1} - x_j) = \varepsilon \end{aligned}$$

Nach dem Riemannschen Kriterium ist damit $f(x)$ integrierbar.



**Satz:** Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Dann gelten:

1) Das Produkt $f(x) \cdot g(x)$ ist integrierbar.
2) Gilt $g(x) \geq C > 0$, so ist der Quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ integrierbar.
3) Die folgenden Funktionen sind integrierbar:

$$|f|(x) := |f(x)|$$

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & : \ f(x) \geq 0 \\ 0 & : \ f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) := \begin{cases} 0 & : \ f(x) \geq 0 \\ -f(x) & : \ f(x) < 0 \end{cases}$$

**Beweis zu 1):** Rückführung auf Riemannsches Kriterium:
Sei $Z \in \mathbf{Z}[a,b]$ eine feste Zerlegung. Dann gilt:

$$O_{f\cdot g}-U_{f\cdot g}=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sup(f\cdot g)[x_j,x_{j+1}]-\inf(f\cdot g)[x_j,x_{j+1}]\right)(x_{j+1}-x_j)$$

Man berechnet:

$$\begin{aligned}
s_j &:= \sup(f\cdot g)[x_j,x_{j+1}]-\inf(f\cdot g)[x_j,x_{j+1}]\\
&= \sup_{x,y}|f(x)g(x)-f(y)g(y)|\\
&= \sup_{x,y}|f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(x)g(y)-f(y)g(y)|\\
&\leq \|f\|_\infty \sup_{x,y}|g(x)-g(y)|+\|g\|_\infty \sup_{x,y}|f(x)-f(y)|
\end{aligned}$$

Wir erhalten also die Abschätzung

$$O_{f\cdot g}-U_{f\cdot g}\leq \|f\|_\infty\cdot(O_g-U_g)+\|g\|_\infty\cdot(O_f-U_f)$$



**Frage:** Stetige Funktionen sind integrierbar. Was ist mit

**Funktionen mit Unstetigkeitstellen?**

Insbesondere: **stückweise stetige Funktionen**

**Satz:** Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann (Riemann)–integrierbar, falls die Menge $\text{Unst}(f)$ ihrer Unstetigkeitsstellen eine so genannte **Lebesgue–Nullmenge** ist, d.h., falls gilt:

$$\forall\,\varepsilon>0\ :\ \exists\ [a_i,b_i]_{i\in\mathbb{N}}\ :$$

$$\text{Unst}(f)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\quad\wedge\quad\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)<\varepsilon$$

## 8.3 Hauptsatz und Anwendungen

**Definition:**

Gegeben seien Funktionen $F, f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ist $F(x)$ differenzierbar auf $[a, b]$, und gilt: $F'(x) = f(x)$, $a \le x \le b$, so heißt

$F(x)$ eine **Stammfunktion** von $f(x)$.

**Bemerkung:**

1) Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so sind auch alle Funktionen der Form

$$\tilde{F}(x) = F(x) + c$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f(x)$.

2) Sind $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$, so ist die Funktion $F_1(x) - F_2(x)$ konstant.



**Satz: (Hauptsatz der Integral– und Differentialrechnung)**

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

1) Die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

2) Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

**Beweis:** Teil 1): Wir müssen zeigen, dass

$$F'(x) = f(x)$$

Sei $h \neq 0$ so, dass $x, x+h \in [a,b]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x)\right| \\
=\ & \frac{1}{|h|}\left|\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt - \int_x^{x+h} f(x)dt\right| \\
=\ & \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt\right| \\
\leq\ & \sup\{\,|f(t) - f(x)| \,:\, |t-x| \leq h \wedge t \in [a,b]\} \\
\to\ & 0 \qquad (h \to 0),
\end{aligned}$$

da die Funktion $f(x)$ stetig ist.



**Beweis:** Teil 2): Nach der Bemerkung und Teil 1) gilt

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C \qquad (C = \text{ Konstante})$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
F(b) &= \int_a^b f(t)dt + C \\
F(a) &= \underbrace{\int_a^a f(t)dt}_{=0} + C
\end{aligned}$$

und wir erhalten

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

**Bemerkungen:**

1) Teil 1) des Hauptsatzes gilt auch für stückweise stetige Funktionen $f(x)$. An den Unstetigkeitsstellen ist die Stammfunktion allerdings nur

**einseitig differenzierbar**

und

$$F'(x^-) = \lim_{t \to x^-} f(t) \qquad F'(x^+) = \lim_{t \to x^+} f(t)$$

2) Eine beliebige Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ nennt man auch

**das unbestimmte Integral**

von $f(x)$ und schreibt

$$F = \int f(x)dx$$

Die Funktion $F$ ist dann nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.



**Beispiele:** Wir bezeichnen mit $C$ stets die **Integrationskonstante**:

$$\begin{aligned}
\int x^n\,dx &= \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad (n \neq -1) \\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x| + C \qquad (x \neq 0) \\
\int \sin x\,dx &= -\cos x + C \\
\int \cos x\,dx &= \sin x + C \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x + C \\
\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C
\end{aligned}$$