6.2 Potenzreihen

Definition: Eine Reihe der Form

(1) $$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

heißt **(komplexe) Potenzreihe** zum Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Dabei gilt $a_k \in \mathbb{C}$ ($k \in \mathbb{N}_0$) und $z \in \mathbb{C}$.

Beispiel: (3.4 Konvergenzkriterien für Reihen aus Analysis I)
Die Exponentialfunktion ist über eine Potenzreihe definiert:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

Elementare Funktionen sind über Potenzreihen definiert:

$$\ln z, \quad a^z, \quad \cosh(z), \sinh(z), \quad \cos(z), \sin(z), \quad \tan(z), \cot(z)$$

Beispiel: Eine Potenzreihe für reelle Zahlen ist die Taylor–Reihe

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Die Taylor–Reihe einer C^∞–Funktion ist im Allgemeinen

nicht konvergent.

Konvergiert die Reihe, so nicht notwendigerweise gegen $f(x)$.

Gilt aber

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

so nennt man die Funktion f **reell analytisch** oder eine C^ω–Funktion (aus Analysis I).

Satz: (Konvergenz von Potenzreihen)

1) Zu jeder Potenzreihe (1) gibt es eine Zahl r, $0 \le r \le \infty$, den sogenannten **Konvergenzradius** der Potenzreihe mit den Eigenschaften

$$|z - z_0| < r \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \textbf{absolut konvergent}$$

$$|z - z_0| > r \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \textbf{divergent}$$

2) Konvergenzradius nach der **Formel von Cauchy, Hadamard**

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \qquad \text{(siehe 3.2 aus Analysis I)}$$

Dabei setzt man: $\frac{1}{\infty} := 0$, $\frac{1}{0} := \infty$

Satz: (Konvergenz von Potenzreihen)

3) Falls einer der folgenden Grenzwerte existiert bzw. gleich ∞ ist, ist er gleich dem Konvergenzradius r:

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}, \qquad r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

4) Formal kann man Potenzreihen differenzieren und erhält

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1}$$

Dies ist wiederum eine Potenzreihe.
Der Konvergenzradius ist identisch mit dem Konvergenzradius der Ausgangsreihe (auch im Fall $r = 0$ oder $r = \infty$).

Beweis: **Teil 1):** Wir definieren

$$r := \sup \left\{ |w| \quad | \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k \text{ konvergent} \right\}$$

Dann gilt $0 \leq r \leq \infty$ und für $|z - z_0| > r$ ist die Potenzreihe divergent.
Gilt $r = 0$, so ist die Potenzreihe (absolut) konvergent nur für $z = z_0$.

Sei also $r > 0$ und $0 < \rho < r \quad \Rightarrow$

$$\exists\, w \in \mathbb{C},\ |w| > \rho \quad : \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k \text{ konvergent}$$

$$\exists\, M > 0 \quad : \quad \forall\, k \geq 0 \quad : \quad |a_k w^k| \leq M \quad ((a_k w^k)_{k \geq 0} \text{ ist beschränkt})$$

Sei nun $|z - z_0| \leq \rho < |w|$. Dann gilt:

$$|a_k (z - z_0)^k| = |a_k w^k| \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k \leq M \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k$$

Sei nun $|z - z_0| \leq \rho < |w|$. Dann gilt:

$$|a_k (z - z_0)^k| = |a_k w^k| \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k \leq M \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k$$

Es gilt:

$$\left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k \leq \left| \frac{z - z_0}{w} \right| < 1$$

Also ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k$ eine **geometrische Reihe**.
Wir haben demnach

$$|a_k (z - z_0)^k| \leq b_k \quad \wedge \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$$

Majorantenkriterium von Weierstraß $\Rightarrow$
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ konvergiert absolut und gleichmäßig für $|z - z_0| \leq \rho$.

Teil 2): Wir verwenden das Wurzelkriterium:

$$\forall\, k \geq k_0 \;:\; \sqrt[k]{|a_k(z-z_0)^k|} < q \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k(z-z_0)^k|} < 1$$

$$\Leftrightarrow\; \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\,|z-z_0| < 1$$

$$\Leftrightarrow\; |z-z_0| < \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Teil 3): Die erste Aussage folgt aus Teil 2).
Für den zweiten Teil verwenden wir das Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k}\right| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |z-z_0|\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$$

Also:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k}\right| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |z-z_0| < \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

Teil 4): Nach Teil 2) ist zu berechnen:

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|a_k|}$$

Wegen $\sqrt[k]{k} \to 1$ für $k \to \infty$ gilt:

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Also sind die Konvergenzradien der Ausgangsreihe und der abgeleiteten Reihe identisch.

Bemerkung: Die Konvergenz von $\sqrt[k]{k} \to 1$ zeigt man folgendermaßen:

$$\sqrt[k]{k} := 1 + r_k,\; r_k \geq 0 \;\Rightarrow\; k = (1+r_k)^k \geq 1 + \frac{k(k-1)}{2} r_k^2$$

$$\Rightarrow\; r_k^2 \leq \frac{2}{k} \;\to\; 0 \quad (k\to\infty)$$

$$\Rightarrow\; r_k \to 0 \quad (k\to\infty)$$

Beispiel:

1) Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!z^k$ konvergiert nur für $z = 0$, denn $k!z^k$ ist für $z \neq 0$ keine Nullfolge.

2) Die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ hat den Konvergenzradius $r = 1$.

3) Die Exponentialreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ hat den Konvergenzradius $r = \infty$.

4) Differentiation der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \ldots \\ \frac{1}{(1-z)^3} &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} = \frac{1}{2}\left(2 + 6z + 12z^2 + \ldots\right) \end{aligned}$$

Beispiel:

5) Aus Teil 4) des letzten Satzes folgt auch, dass die integrierte Potenzreihe

$$C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z - z_0)^{k+1}$$

den gleichen Konvergenzradius wie die Ausgangsreihe besitzt.

Beispiel: Integration der Potenzreihe

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \qquad |z| < 1$$

ergibt eine Potenzreihenentwicklung der Logarithmusfunktion

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \qquad -1 < x < 1$$

Beispiel:

5) Fortsetzung:

   Integration der Potenzreihe

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$$

   ergibt

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}, \qquad -1 < x < 1$$

Bemerkung:

1) Eine Potenzreihe ist innerhalb ihres Konvergenzkreises mit Radius r stetig.
   Reelle Potenzreihen sind auf $(x_0 - r, x_0 + r)$ auch C^∞–Funktionen.
   Eine reelle Potenzreihe ist gleich der Taylor–Reihe einer Funktion.

Bemerkung:

2) Es gilt der folgende **Identitätssatz** für Potenzreihen:

   Sind $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ reelle Potenzreihen, die in einem Intervall $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ die gleiche Funktion darstellen, so gilt:

$$a_k = b_k \qquad \forall\, k$$

3) **Abelsche Grenzwertsatz**

   Reelle Potenzreihen der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

   sind überall dort stetig, wo sie konvergieren, d.h. insbesondere auch in den zum Konvergenzbereich gehörigen Randpunkten des Konvergenzintervalls.

Beispiel: Da die Reihe

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \qquad -1 < x < 1$$

auch für $x = +1$ konvergiert, folgt nach dem Abelschen Grenzwertsatz, dass die obige Gleichung auch in $x = 1$ gültig ist:

$$\ln(1+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} 1^{k+1}$$

Daraus folgt:

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Satz: (Rechenregeln für Potenzreihen)

Seien $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1 > 0$ und $r_2 > 0$. Dann gelten:

1)

$$f(z) + g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k, \qquad |z| < \min(r_1, r_2)$$

2)

$$\lambda f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k z^k, \qquad |z| < r_1$$

3) **Cauchy–Produkt für Potenzreihen**

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} \right) z^k, \qquad |z| < \min(r_1, r_2)$$

Satz: (Rechenregeln für Potenzreihen)

4) Ist $f(0) = 0$, so läßt sich die Potenzreihe $f(z)$ in die Potenzreihe $g(z)$ einsetzen. Es gibt also ein $r_3 > 0$ und $c_k \in \mathbb{C}$ mit:

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad |z| < r_3$$

5) Ist $f(0) \neq 0$, so besitzt die Funktion $1/f(z)$ eine Potenzreihenentwicklung. Es gilt also $r_4 > 0$ und $d_k \in \mathbb{C}$ mit:

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \qquad |z| < r_4$$

Die Koeffizienten d_k lassen sich rekursiv berechnen:

$$a_0 d_0 = 1, \qquad a_0 d_k = -\sum_{l=0}^{k-1} d_l a_{k-l}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Dies ergibt sich direkt aus dem Cauchy–Produkt.

Beispiele zu den Rechenregeln von Potenzreihen:

1) Wir definieren für $x \in \mathbb{R}$:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

und ersetzen e^x durch die Potenzreihe $\sum \frac{x^k}{k!}$:

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-x)^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Analog erhält man für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Beispiele zu den Rechenregeln von Potenzreihen:

2) Für $f(x) = \dfrac{\cos x}{1-x}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1-x} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} x^l\right) \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots\right) \cdot \left(1 + x + x^2 + \ldots\right) \\ &= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{2!}\right) x^2 + \left(1 - \frac{1}{2!}\right) x^3 \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right) x^4 + \ldots \qquad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

Beispiele zu den Rechenregeln von Potenzreihen:

3) Wir setzen

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Dabei lautet die Potenzreihe des Nenners:

$$e^x - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1}$$

Zur Potenzreihenentwicklung von $g(x)$ machen wir daher den Ansatz:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$$

Damit gilt:

$$1 = \frac{e^x - 1}{x} \cdot g(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l\right)$$

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}\, x^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!}\, x^l \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \frac{B_l}{l!(k-l+1)!} \right) x^k$$

Also muss gelten:

$$\sum_{l=0}^{k} \frac{B_l}{l!(k-l+1)!} = \begin{cases} 1 & : \ k = 0 \\ 0 & : \ k > 0 \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$B_0 = 1, \qquad B_k = -\sum_{l=0}^{k-1} \frac{k!}{l!(k-l+1)!}\, B_l \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Die Zahlen B_k nennt man **Bernoullische Zahlen**:

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42}, \ldots$$