# Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Jens Struckmeier

Fachbereich Mathematik

Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg

Sommersemester 2006



**Informationen zur Vorlesung**

- **Klausureinsicht Analysis I**
  Donnerstag, den 6. April 2006, siehe Internet
- **Erste Übung zu Analysis II**
  Im Internet verfügbar, Übungsbetrieb startet nächste Woche
- **Erste Anleitung**
  Dienstag, den 4. April 2006

## 5.4 Fixpunkt–Iteration

Nochmals: Iterative Lösung der (nichtlinearen) Gleichung

$$f(x) = 0$$

Abschnitt 3.1 der Vorlesung:

- Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung)
- Newton–Verfahren

**Iteratives Verfahren:** Fixpunkt–Iteration mit Verfahrensfunktion $\Phi$

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

und

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_k) = \Phi(\lim_{k\to\infty} x_k) = \Phi(x^*)$$



**Fixpunkt–Iteration:** Löse statt $f(x) = 0$ das Fixpunkt–Problem

$$x = \Phi(x)$$

mittels der Iteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Aber: Verfahrensfunktion $\Phi$ ist nicht eindeutig!

**Beispiel:** Suche im Intervall $(0, \pi/2)$ die eindeutige Nullstelle von

$$f(x) := 2x - \tan x$$

**1. Iteration** mittels

$$2x - \tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \tan x =: \Phi_1(x)$$

**2. Iteration** mittels

$$2x - \tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan 2x =: \Phi_2(x)$$

**Ergebnis** der 1. Iteration und 2. Iteration:

- Iterationen

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\tan x_k \qquad y_{k+1} = \arctan 2y_k$$

- Wähle als Anfangsnäherung in beiden Iterationen

$$x_0 := 1.2 \qquad y_0 := 1.2$$

- Beide Iterationen konvergieren im Grenzwert $k \to \infty$, aber

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0 \qquad \lim_{k\to\infty} y_k = 1.1655\,61185$$

- Berechne die Iterationen mittels eines Computerprogramms

**Konvergenzgeschwindigkeit** hängt ab von

dem Abstand zwei benachbarter Folgenglieder: $|x_{k+1} - x_k|$



**Definition:** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.

Eine Abbildung $\Phi : D \to V$, $D \subset V$ heißt **Lipschitz–stetig** auf $D$, falls eine Konstante $L$ existiert, sodass

$$\forall\, x, y \in D \quad : \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\|$$

Die Konstante $L$ nennt man **die Lipschitz–Konstante**.

**Definition:** Eine Abbildung $\Phi : D \to V$, $D \subset V$ heißt **kontrahierend**, falls $L < 1$ gilt.

Man nennt dann $L$ die **Kontraktionskonstante** von $\Phi$.

**Bemerkung:** Jede Lipschitz–stetige Funktion ist stetig!

Es gelte die Abschätzung

$$\forall\, x \neq y \quad : \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \|x - y\|$$

Dann ist $\Phi$ nicht notwendigerweise kontrahierend!

**Satz:** Jede $C^1$–Funktion $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz–stetig auf $[a,b]$ mit der Lipschitz–Konstanten

$$L := \sup\{|\Phi'(x)| \ : \ a \leq x \leq b\}$$

Ist $L < 1$, so ist $\Phi$ kontrahierend; ist dagegen $L > 1$, so ist $\Phi$ nicht kontrahierend!

**Beweis:** Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)|\,|x-y| \leq L\,|x-y|$$

**Beispiel:** Betrachte die Funktion $\Phi(x) = e^{-x}$. Dann gilt

$$\Phi'(x) = -e^{-x}$$

Lipschitz–Konstante

$$L := \sup\{|e^{-x}| \ : \ a \leq x \leq b\}$$



**Banachscher Fixpunktsatz**

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum (Banachraum). Ferner sei $D \subset V$ abgeschlossen und $\Phi : D \to D$ eine kontrahierende Abbildung der Menge $D$ in sich mit einer Kontraktionskonstanten L (also $L < 1$).
Dann gelten die folgenden Aussagen:

1) Es gibt genau einen Fixpunkt $x^*$ von $\Phi$ in $D$

2) Für jeden Startwert $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunkt–Iteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ gegen den Fixpunkt $x^*$

3) Es gelten die Fehlerabschätzungen:

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|$$

**Beispiel:** Berechne den kleinsten Fixpunkt von $\Phi(x) = 0.1e^x$
Setze $D = [0, 1]$, dann gilt

$$0 < \Phi(x) \leq \frac{\exp(1)}{10} < 1$$

Daher bildet $\Phi$ das Intervall $D = [0, 1]$ auf sich ab.

$$\Phi(x) = \Phi'(x) = 0.1e^x$$

Damit ist $\Phi$ auf $D$ kontrahierend mit $L := \exp(1)/10$.
Berechne Fixpunkt $x^*$ mit einem absoluten Fehler von ca. $10^{-6}$:

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\| \leq 10^{-6}$$

Daraus ergibt sich mit $x_0 = 1$ und damit $x_1 = \exp(1)$

$$n \geq \frac{-6}{\log_{10} L} \approx 10.61$$

Tatsächlich ergibt sich nach 11 Iterationen eine zehnstellige Genauigkeit.



**Bemerkung:** Existiert eine abgeschlossen Kugel

$$K = \{x \in V \mid \|x - y_0\| \leq r\}$$

mit den Eigenschaften

1) $\Phi : K \to V$ ist kontrahierend mit Konstraktionskonstante $L < 1$
2) $\|\Phi(y_0) - y_0\| \leq (1 - L)r$

so gilt $\Phi(K) \subset K$ und der Fixpunktsatz lässt sich mit $D = K$ anwenden.

**Beweis:** Betrachte ein $y \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|\Phi(y) - y_0\| &\leq \|\Phi(y) - \Phi(y_0) + \Phi(y_0) - y_0\| \\
&\leq L\|y - y_0\| + (1 - L)r \\
&\leq r
\end{aligned}$$

## Kapitel 6: Potenzreihen und elementare Funktionen

### 6.1 Gleichmäßige Konvergenz

Sei $(f_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Funktionen mit $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$

**Definition:** Zur Konvergenz von Funktionenfolgen definieren wir

1) Die Funktionenfolge $(f_n)$ konvergiert **punktweise** gegen eine Funktion $f$, falls gilt:

$$\forall\, z \in D \quad : \quad \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$$

2) Die Funktionenfolge $(f_n)$ konvergiert **gleichmäßig** gegen eine Funktion $f$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left[\sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)|\right] = 0$$



**Beispiel:** Betrachte die Funktionenfolge $(f_n)$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & : \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & : \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Diese Folge konvergiert offensichtlich gegen die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x = 0 \\ 0 & : \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Die Konvergenz ist aber **nicht** gleichmäßig, denn

$$\|f_n - f\|_\infty = 1 \qquad \forall\, n \geq 0$$

Jede Funktion $f_n(x)$ der Folge ist außerdem **stetig**

Die Grenzfunktion $f$ ist **nicht** stetig!

**Beispiel:** Wir betrachten die Funktionfolge

$$f_n(x) = nx \exp(-nx) \qquad n \geq 1$$

Die Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen $f(x) = 0$, allerdings:

$$f_n'(x) = n \exp(-nx) - n^2 x \exp(-nx) = n \exp(-nx)(1 - nx)$$

Aus $f_n'(x) = 0$, folgt $x = 1/n$. Weiter gilt:

$$f_n''(1/n) < 0$$

Das Maximum der Funktion $f_n(x)$ liegt bei $x = 1/n$ mit

$$f_n(1/n) = \exp(-1) \qquad \forall\, n \geq 1$$



**Satz:** Konvergiert eine Funktionfolge $(f_n)$ mit $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f$ und sind die Funktionen $f_n$ stetig auf $D$, so ist auch die Grenzfunktion stetig auf $D$.

**Beweis:** Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $n$ so gewählt, dass

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$$

Weiter sei $\delta > 0$ so gewählt, dass

$$\forall\, z \in D \quad : \quad \|z - z_0\|_\infty < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

**Satz:** Gleichmäßige Konvergenz von Reihen von Funktionen

1) **Majorantenkriterium von Weierstraß**

   Gegeben seien Funktionen $f_k : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$. Gilt dann für $b_k \in \mathbb{R}$: $\quad \forall\, z \in D \quad : \quad |f_k(z)| \leq b_k \quad \wedge \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$,

   so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ gleichmäßig und absolut konvergent auf $D$.

2) Sind die Funktionen $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $[a,b]$ und die beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(z)$ gleichmäßig konvergent, so ist auch $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(z)$$

   für alle $x \in [a,b]$.