Aufgabe 1:

a) Gesucht sei ein Fixpunkt x^* der Funktion

$$g(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

im Intervall $I = [1, 2]$.

(i) Überprüfen Sie die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes auf dem Intervall $I = [1, 2]$.

(ii) Führen Sie ausgehend von $x_0 = 1$ einen Schritt des Fixpunktverfahrens $x_{n+1} = g(x_n)$ durch und zeigen Sie, dass der absolute Fehler nach einer Iteration durch 0.5 beschränkt ist. Das heißt:

$$|x_1 - x^*| \le 0.5$$

(iii) Geben Sie eine obere Schranke für den relativen Fehler $\left|\frac{x_1 - x^*}{x^*}\right|$ an.

b) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4 - x^2}}\,dx$ divergiert.

Lösung zur Aufgabe 1:

a) (i)

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{4} \le \frac{1}{2}(2-1)^2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Die Funktion g ist auf dem Intervall I kontrahierend mit der Kontaktionszahl $L = 3/4$.[**3 Punkte**]

Darüberhinaus folgt aus der obigen Rechnung, dass g monoton steigend ist.

$$g(1) = \frac{7}{6}, \qquad g(2) = \frac{19}{12}, \qquad g \text{ monoton } \Longrightarrow g : I \longrightarrow I.$$

[**3 Punkte**]

(ii) $x_0 = 1 \Longrightarrow x_1 = 7/6 \Longrightarrow |x_1 - x^*| \le \dfrac{L}{1-L}|x_1 - x_0| = \dfrac{1}{2}$. [**1 Pkt**]

(iii) $\dfrac{|x_1 - x^*|}{|x^*|} \le \dfrac{|x_1 - x^*|}{1} = \dfrac{1}{2}$. [**1 Punkt**]

b)

$$\int_2^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4 - x^2}}\,dx = \int_2^\infty \frac{x}{x\sqrt{x^2 - 1}}\,dx \ge \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2}}\,dx = \int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx.$$

Da das letzte Integral divergiert, divergiert auch das zu untersuchende Integral. [**2 Punkte**]

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei die Funktion $f : [-4,4] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \dfrac{5x+4}{(x^2+4)(x-5)}$.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-4}^{4} f(x)dx$.

b) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion $g(x) := \dfrac{x}{(x^2+4)}$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und geben Sie den Konvergenzradius der Reihe an. Wie lautet das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(x;0)$ von g mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$?

(Hinweis: Geometrische Reihe)

Lösung zur Aufgabe 2:

a) Der Ansatz $\dfrac{5x+4}{(x^2+4)(x-5)} = \dfrac{ax+b}{x^2+4} + \dfrac{c}{x-5}$ **[1 Punkt]**

liefert $ax^2 - 5ax + bx - 5b + cx^2 + 4c = 5x + 4$

Vergleich der Koeffizienten liefert:

für x^2 : $c = -a$,

für x^1 : $b = 5 + 5a$, **[3 Punkte]**

für x^0 : $-5b + 4c = -25 - 25a - 4a = 4 \implies a = -1 , \implies b = 0 , c = 1$.

Also erhält man

$$\int_{-4}^{4} f(x)dx = \int_{-4}^{4} \frac{5x+4}{(x^2+4)(x-5)}\,dx = \int_{-4}^{4} \frac{-x}{x^2+4}\,dx + \int_{-4}^{4} \frac{1}{x-5}\,dx$$

$$= \left[\ln|x-5| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) \right]_{-4}^{4} = -\ln(9)\,.$$ **[2 Punkte]**

b)

$$g(x) := \frac{x}{(x^2+4)} = \frac{x}{4}\,\frac{1}{1-(-\frac{x^2}{4})} = \frac{x}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{k+1}}\,x^{2k+1}\,.$$ **[2 Punkte]**

Der Konvergenzradius ergibt sich als Konvergenzradius einer geometrischen Reihe zu $r = 2$. **[1 Punkt]**

$T_2(x,0) = \dfrac{(-1)^0}{4^{0+1}}\,x^{0+1} = \dfrac{x}{4}$. **[1 Punkt]**