Aufgabe 1: Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x\cos(x)$$

a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(x) =$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Wie lautet demnach das Taylorpolynom zweiten Grades zur Funktion f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$?

b) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_2 zweiten Grades der Funktion $f(x) = x\cos(x)$ zu den folgenden Daten.

x_k	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$
$f(x_k)$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$

Verwenden Sie die Newtonsche Darstellung des Interpolationspolynoms (dividierte Differenzen!).

Berechnen Sie $p_2\left(\frac{\pi}{6}\right)$ und zeigen Sie, dass für den Interpolationsfehler die folgende Ungleichung gilt:

$$\left| p_2\left(\frac{\pi}{6}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) \right| < \frac{\pi^4}{240} \, .$$

Lösung zur Aufgabe 1:

a) Aus der bekannten Cosinus–Reihe ergibt sich unmittelbar

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k)!} \qquad \text{[1 Punkt]}$$

und damit $\quad T_2(x;0) = x \cdot \qquad$ [1 Punkt]

b) Das Schema der dividierten Differenzen lautet: [2 Punkte]

x_k	$[y_k]$	$[y_k, y_{k+1}]$	$[y_k, \ldots, y_{k+2}]$
$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$		
0	0	$\frac{1}{2}$	
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	0

und damit ist

$$p_2(x) = -\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \qquad \text{[1 Punkt]}$$

und

$$p_2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12} \cdot . \qquad \text{[1 Punkt]}$$

Für die Fehlerabschätzung benötigt man die dritte Ableitung von f .

$$f'(x) = \cos x - x \sin x \qquad f''(x) \qquad = -2 \sin x - x \cos x$$

$$f'''(x) = -3 \cos x + x \sin x \qquad [2 Punkte]$$

Für den Interpolationsfehler gilt mit einem $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei ein Draht, der durch die Kurve

$$c : [0; \frac{\pi}{3}] \mapsto \mathbb{R}^2 \qquad c : t \longmapsto \sqrt{2}\ \left(\cos^2 t; \sin^2 t\right)^T$$

beschrieben wird. Die Dichte des Drahtes sei gegeben durch

$$\rho(x,y) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} y \cdot$$

Bestimmen Sie die Masse des Drahtes.

b) Gegeben sei die Funktion $f : [0; \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x\ \sin(x)$. Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch die Rotation des Graphen von f um die x-Achse entsteht.

Hinweis zu Teil b): $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

Lösung zur Aufgabe 2:

a)

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= \sqrt{2}(-2\sin t\cos t; 2\sin t\cos t)^T \\ \|\dot{c}\| &= 2\sqrt{2}\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t + \sin^2 t\cos^2 t} = 4\sin t\cos t \qquad [1 Punkt] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Masse} = M &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \rho(c(t)) \cdot \|\dot{c}\|\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\ \sin^2 t) \cdot 4\sin t\cos t\ dt \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos^2 t) \cdot \sin t\cos t\ dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t\cos^3 t\ dt \qquad [2 Punkte] \\ &\text{Substitution: } u = \cos t \Rightarrow du = -\sin t\ dt \\ &= 4\int_1^{\cos\frac{\pi}{3}} -u^3\ du = \int_{\cos\frac{\pi}{3}}^1 4u^3\ du = \left[u^4\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= 1 - \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16} \qquad \text{oder} \qquad = 1 - \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^4 \qquad [2 Punkte] \end{aligned}$$

ALTERNATIV :

$x + y = \sqrt{2}\,(\sin^2 t\ +\ \cos^2 t) = \sqrt{2} \implies y = \sqrt{2} - x$

$\rho(x,y) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} - x) = 1 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x$

Parametrisierung nach $t = x$ ergibt:

$\tilde{c}(t) = (t, \sqrt{2} - t)^T \qquad t \in \left[\sqrt{2}\cos^2(\pi/3), \sqrt{2}\cos^2(0)\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{4}, \sqrt{2}\right]$

Hiermit gilt

$\|\dot{\tilde{c}}(t)\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

und für die Masse erhält man

$$M = \int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} t\,\sqrt{2}dt \;=\; \frac{t^2}{2}\bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\sqrt{2}} = \frac{15}{16}\,.$$

b)

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2\, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x\, dx \\
&= \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\, dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(2x)\, dx \\
&= \\
&= \frac{\pi^4}{48} - \frac{\pi}{2}\left[x^2\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\,\frac{\sin(2x)}{2}\, dx \\
&= \\
&= \frac{\pi^4}{48} + \frac{\pi}{2}\left[x\frac{-\cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos(2x)}{2}\, dx \\
&= \frac{\pi^4}{48} + \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4}\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^4}{48} + \frac{\pi^2}{8}\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

[Ansatz : 1 Punkt, Rechnung : 4 Punkte]

Hinweis: Alle Integrale sind elementar zu berechnen. Stammfunktionen aus Formelsammlungen etc. dürfen nicht verwendet werden.

Viel Erfolg!