

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reiner Lauterbach
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Sommersemester 2005
Basierend auf der Vorlesung von
Jens Struckmeier (SS 2002)

9 Anwendungen der Integralrechnung

9.1 Rotationskörper

Betrachte einen Funktionsgraphen $y = f(x)$, der um die x -Achse rotiert:
Für die Querschnittsfläche gilt

$$Q(x) = \pi(f(x))^2$$

Damit ergibt sich die Volumenformel:

$$V_{rot} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Prinzip von Cavalieri: Haben zwei Körper die gleiche Querschnittsfläche, so sind ihre Volumina gleich.

Beispiel: Durch die Rotation der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$$

um die x -Achse erhält man ein Rotationsellipsoid mit dem Volumen

$$\begin{aligned} V_{rot} &= \pi \int_{-a}^a \left[b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right]^2 dx \\ &= \pi b^2 \int_{-a}^a \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right) dx \\ &= \frac{4}{3} \pi a b^2 \end{aligned}$$

Volumen einer Kugel: Für $a = b = r$ ergibt sich

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Oberfläche eines Rotationskörpers:

$$O_{rot} = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

Beispiel:

Für die Oberfläche einer Kugel gilt mit

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

die Formel

$$O_{Kugel} = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2\pi r \int_{-r}^r dx = 4\pi r^2$$

9.2 Kurven und Bogenlänge

Definition:

- 1) Eine stetige Funktion $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt eine **Kurve** im \mathbb{R}^n (auch **Parameterdarstellung einer Kurve**).
 $c(a)$ heißt der Anfangspunkt, $c(b)$ der Endpunkt der Kurve c .
 Eine Kurve heißt **geschlossen**, falls $c(a) = c(b)$.
- 2) Ist die Abbildung $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Abbildung, d.h., ist jede Koordinatenfunktion $c_j(t)$ von $c = (c_1, \dots, c_n)$ stetig differenzierbar, so heißt $c(t)$ eine C^1 -**Kurve**.
 $c(t)$ heißt **stückweise C^1 -Kurve**, falls es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ gibt, sodass $c(t)$ auf jedem Teilintervall $[t_j, t_{j+1}]$ eine C^1 -Funktion ist.
- 3) Eine C^1 -Kurve c heißt **glatt**, falls

$$\forall t \in [a, b] \quad \dot{c}(t) = (\dot{c}_1(t), \dots, \dot{c}_n(t))^T \neq 0.$$

Beispiele:

- 1) Die Kurve

$$c(t) := (\cos t, \sin t)^T \quad t \in [0, 2\pi]$$

beschreibt einen **Kreis** im \mathbb{R}^2 .

- 2) Die Kurve

$$c(t) = (rt - a \sin t, r - a \cos t)$$

beschreibt eine **Zykloide**.

Wegen

$$\dot{c}(t) = (r - a \cos t, a \sin t)^T$$

ist die Kurve im Fall $r = a$ an den Stellen $t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, nicht glatt!

Beispiele:

3) Die Kurve

$$c(t) = (r \cos(2\pi t), r \sin(2\pi t), ht)^T \quad t \in \mathbb{R}$$

beschreibt eine **Schraubenlinie** mit Radius $r > 0$ und Ganghöhe h .

Ist $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine stetige, bijektive und monoton wachsende Abbildung, so hat die neue Kurve

$$\tilde{c}(\tau) = c(h(\tau)), \quad \alpha \leq \tau \leq \beta$$

die gleiche Gestalt und gleichen Durchlaufsinne wie die Kurve c :

Parameterwechsel oder Umparametrisierung**Bemerkung:**

- 1) Kurven, die durch Parameterwechsel auseinander hervorgehen, werden als gleich angesehen.
- 2) Im Fall einer C^1 -Kurve werden entsprechend nur C^1 -Parameterwechsel zugelassen.
- 3) Jede stetige Funktion $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ lässt sich als eine Kurve auffassen:

$$c(t) := (x, f(x))^T \quad a \leq x \leq b$$

beziehungsweise

$$c(t) := (a + t(b - a), f(a + t(b - a)))^T \quad 0 \leq t \leq 1$$

Bogenlänge einer Kurve

Sei $Z = \{a = t_0 < t_1 \dots < t_m = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$:

$$L(Z) := \sum_{j=1}^{m-1} \|c(t_{j+1}) - c(t_j)\|$$

ist eine **untere Schranke** für die Bogenlänge der Kurve $c(t)$.

Definition: Ist die Menge $\{L(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\}$ nach oben beschränkt, so heißt die Kurve c **rektifizierbar**, und

$$L(c) := \sup\{L(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\} = \lim_{\|Z\| \rightarrow 0} L(Z)$$

ist die **Länge der Kurve** c .

Satz: Jede C^1 -Kurve ist rektifizierbar und es gilt:

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$$

Beweisidee: Zunächst gilt die Darstellung

$$L(Z) = \sum_{j=1}^{m-1} \sqrt{\sum_{k=1}^n (c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j))^2}$$

und nach dem Mittelwertsatz gibt es Zahlen τ_{k_j} mit $t_j \leq \tau_{k_j} \leq t_{j+1}$, sodass

$$c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j) = \dot{c}_k(\tau_{k_j}) \cdot (t_{j+1} - t_j)$$

Daraus folgt

$$L(Z) = \sum_{j=1}^{m-1} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n (\dot{c}_k(\tau_{k_j}))^2} (t_{j+1} - t_j) \right)$$

Bogenlänge approximiert durch **Riemansche Summe**:

$$R(Z) = \sum_{j=1}^{m-1} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n (\dot{c}_k(t_j))^2 (t_{j+1} - t_j)} \right)$$

Zeige nun mit gleichmäßiger Stetigkeit von \dot{c} : für $\|Z\| \rightarrow 0$ gilt

$$|L(Z) - R(Z)| \rightarrow 0.$$

Weiter gilt:

$$R(Z) = \sum_{j=1}^{m-1} \left(\underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^n (\dot{c}_k(t_j))^2 (t_{j+1} - t_j)}}_{=\|\dot{c}(t_j)\|} \right)$$

$$\Rightarrow L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$$

Beispiel: Länge eines Zykloidenbogens

$$c(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))^T, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Man berechnet:

$$\dot{c}(t) = (r(1 - \cos t), r \sin t)^T$$

$$\|\dot{c}(t)\| = r \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2r \sin \frac{t}{2}$$

$$L(c) = 2r \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8r$$

Bemerkung: Die Bogenlänge einer C^1 -Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung:

$$L(c \circ h) = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{c}(h(\tau))h'(\tau)\| d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{c}(h(\tau))\| |h'(\tau)| d\tau = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt = L(c)$$