Analysis II für
Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reiner Lauterbach
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Sommersemester 2005
Basierend auf der Vorlesung von
Jens Struckmeier (SS 2002)

8.4 Integration rationaler Funktionen

Rationale Funktionen

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Integration erfolgt über die

Partialbruch–Zerlegung

einer rationalen Funktion.
Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) &= p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\ &\quad + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^{k_j}} \right] \end{aligned}$$

Erläuterungen:

1) Wir haben angenommen, dass $p(x)$ und $q(x)$ keine gemeinsamen Nullstellen besitzen.
2) Das Polynom $p_1(x)$ tritt nur auf, falls

$$\deg p \geq \deg q$$

In diesem Fall berechnet man $p_1(x)$ mittels **Polynomdivision**.

3) Bei der verbleibenden rationalen Funktion

$$\frac{p_2(x)}{q_2(x)} = R(x) - p_1(x)$$

besitzt der Nenner $q_2(x)$

- die **reellen** Nullstellen x_j mit Vielfachheit k_j
- die **komplexen** Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$ mit Vielfachheit k_j
- und damit komplex konjugierte Nullstellen $\bar{z}_j = a_j - ib_j$

Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) \quad &= \quad p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\ &\quad + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{[(x-a_j)^2 + b_j^2]^{k_j}} \right] \end{aligned}$$

Parameter, die berechnet werden müssen

$$\alpha_{jl}, \qquad j = 1, \ldots, n_1,\ l = 1, \ldots, k_j$$

$$\gamma_{jl}, \qquad j = n_1 + 1, \ldots, n_2,\ l = 1, \ldots, k_j$$

$$\delta_{jl}, \qquad j = n_1 + 1, \ldots, n_2,\ l = 1, \ldots, k_j$$

Dies erfolgt über **Koeffizientenvergleich**,
d.h. die rechte Seite wird auf den Hauptnenner gebracht.

Beispiel: Wir betrachten die rationale Funktion

$$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{x^2+1} \\ \Rightarrow \quad 1-x &= x(x^2+1)\alpha_1 + (x^2+1)\alpha_2 + x^2(\gamma_1 x + \delta_1) \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren:

$$1-x = (\alpha_1+\gamma_1)x^3 + (\alpha_2+\delta_1)x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

Koeffizientenvergleich:

$$\alpha_1+\gamma_1 = 0, \quad \alpha_2+\delta_1 = 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1$$

Partialbruchzerlegung:

$$R(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

Bei der Integration rationaler Funktionen gibt es **4 Grundtypen**:

1) **Polynome:**

$$\int \sum_{k=0}^{s} c_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{s} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

2) **Inverse Potenzen:**

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^l} = \begin{cases} \ln|x-x_0| + C & : \quad l = 1 \\ \frac{1}{1-l} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{l-1}} + C & : \quad l = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

3) **Inverse Quadrate:**

$$\begin{aligned} I_l &:= \int \frac{1}{(t^2+1)^l} \, dt \qquad (l \in \mathbb{N}) \\ I_l &= \frac{1}{2(1-l)} \left[(3-2l) I_{l-1} - \frac{t}{(t^2+1)^{l-1}} \right], \qquad l = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Zunächst gilt:

$$I_1 = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t + C$$

Herleitung einer Rekursionsformel für $l > 1$:
Mittels Substitution:

$$\begin{aligned}\int \frac{2t}{(t^2+1)^l}\,dt &= \int \frac{du}{u^l} = \frac{1}{1-l}\cdot\frac{1}{u^{l-1}} + C\\ &= \frac{1}{1-l}\cdot\frac{1}{(t^2+1)^{l-1}} + C\end{aligned}$$

Mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned}I_{l-1} &= \int \frac{1}{(t^2+1)^{l-1}}\,dt = \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^l}\,dt = \int \frac{t}{2}\cdot\frac{2t}{(t^2+1)^l}\,dt + I_l\\ &= \frac{1}{2(1-l)(t^2+1)^{l-1}} - \frac{1}{2(1-l)}\cdot I_{l-1} + I_l\end{aligned}$$

4) **Wie Typ 3), aber Zähler linear:**

$$\begin{aligned}\int \frac{cx+d}{[(x-a)^2+b^2]^l}\,dx &= \frac{c}{2}\int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^l}\,dx\\ &\quad +(d+c\cdot a)\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^l}\end{aligned}$$

Erstes Integral:

$$\begin{aligned}\int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^l}\,dx &= \int \frac{du}{u^l}\\ &= \begin{cases} \ln|(x-a)^2+b^2| + C & : \quad l = 1\\ \frac{1}{1-l}\cdot\frac{1}{[(x-a)^2+b^2)^l]} + C & : \quad l = 2,3,\ldots\end{cases}\end{aligned}$$

Zweites Integral:

$$\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^l} = \frac{1}{b^{2l-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^l} \qquad \text{mit} \quad t = \frac{x-a}{b}$$

Beispiel: Wir betrachten wiederum die rationale Funktion

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1-x}{x^2(x^2+1)} \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1} \\ \Rightarrow \quad \int R(x)\,dx &= -\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x + C \end{aligned}$$

Bemerkung: Substitution bei anderen Integralen:

1)

$$\int R(e^x)\,dx = \int \frac{R(t)}{t}\,dt$$

2)

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

8.5 Uneigentliche Integrale

Integrale über unbeschränkte Bereiche

$$\int_a^\infty f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx, \quad \int_\infty^\infty f(x)\,dx$$

Integrale über unbeschränkte Funktionen mit Singularitäten am Rand

$$\int_a^b f(x)\,dx, \;\; f:(a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig}, \;\; f:[a,b) \to \mathbb{R} \text{ stetig}$$

Lokale Integrierbarkeit:

Definition: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt **lokal integrierbar**, falls sie über jedem kompakten Intervall $[a,b] \subset D$ integrierbar ist.

Ist $f(x)$ lokal integrierbar, so kann man folgende Grenzwerte betrachten:

$$a \to \infty \qquad b \to \infty$$

Definition: Ist eine Funktion lokal integrierbar, so definiert man

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$$

Bemerkung: Der **Cauchysche Hauptwert** ist definiert als

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{z\to\infty} \int_{-z}^{z} f(x)\,dx$$

und im Allgemeinen **nicht identisch** mit obigem Integral!

Definition: Die Funktion $f(x)$ sei lokal integrierbar über $(a,b]$ bzw. $[a,b)$ oder (a,b). Dann definiert man

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Bemerkung: Der **Cauchysche Hauptwert** ist definiert als

$$\text{CHW} \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right)$$

Beispiel:

1) Wegen

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}\,\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} + C & : \quad \alpha > 1 \\[2ex] \ln|x| + C & : \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha = 1$.

2) Folgendes uneigentliche Integral besitzt den Wert 1:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2}\,dx$$