Analysis II für
Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reiner Lauterbach
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Sommersemester 2005
Basierend auf der Vorlesung von
Jens Struckmeier (SS 2002)

Informationen zur Vorlesung

- **Klausurergebnisse Mathematik I**
  Bekanntgabe der Ergebnisse voraussichtlich Ende April
- **Übungen und Scheine zu Analysis I**
  Bitte in den Sprechstunden bis Ende Mai abholen
- **Erste Übung zu Analysis II**
  Im Internet verfügbar, Übungsbetrieb startet nächste Woche
- **Erste Anleitung**
  Dienstag, 5. April 2005

5.4 Fixpunkt–Iteration

Nochmals: Iterative Lösung der (nichtlinearen) Gleichung

$$f(x) = 0$$

Abschnitt 3.1 der Vorlesung:

- Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung)
- Newton–Verfahren

Iteratives Verfahren: Fixpunkt–Iteration mit Verfahrensfunktion Φ

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

und

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_k) = \Phi(\lim_{k\to\infty} x_k) = \Phi(x^*)$$

Fixpunkt–Iteration: Löse statt $f(x) = 0$ das Fixpunkt–Problem

$$x = \Phi(x)$$

mittels der Iteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Aber: Verfahrensfunktion Φ ist nicht eindeutig!

Beispiel: Suche im Intervall $(0, \pi/2)$ die eindeutige Nullstelle von

$$f(x) := 2x - \tan x$$

1. Iteration mittels

$$2x - \tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\tan x =: \Phi_1(x)$$

2. Iteration mittels

$$2x - \tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan 2x =: \Phi_2(x)$$

Ergebnis der 1. Iteration und 2. Iteration:

- Iterationen

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \tan x_k \qquad y_{k+1} = \arctan 2y_k$$

- Wähle als Anfangsnäherung in beiden Iterationen

$$x_0 := 1.2 \qquad y_0 := 1.2$$

- Beide Iterationen konvergieren für $k \to \infty$, aber

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0 \qquad \lim_{k\to\infty} y_k = 1.1655\,61185$$

- Berechne die Iterationen mittels eines Computerprogramms

Konvergenzgeschwindigkeit hängt ab von

dem Abstand zwei benachbarter Folgenglieder: $|x_{k+1} - x_k|$

Definition: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.
Eine Abbildung $\Phi : D \to V$, $D \subset V$ heißt **Lipschitz–stetig** auf D, falls eine Konstante L existiert, sodass

$$\forall\, x, y \in D \quad : \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\|$$

Die Konstante L nennt man **die Lipschitz–Konstante**.

Definition: Eine Abbildung $\Phi : D \to V$, $D \subset V$ heißt **kontrahierend**, falls $L < 1$ gilt.

Man nennt dann L die **Kontraktionskonstante** von Φ.

Bemerkung: Jede Lipschitz–stetige Funktion ist stetig!
Es gelte die Abschätzung

$$\forall\, x \neq y \quad : \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \|x - y\|$$

Dann ist Φ nicht notwendigerweise kontrahierend!

Satz: Jede C^1–Funktion $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz–stetig auf $[a,b]$ mit der Lipschitz–Konstanten

$$L := \sup\{|\Phi'(x)| \ : \ a \le x \le b\}$$

Ist $L < 1$, so ist Φ kontrahierend; ist dagegen $L > 1$, so ist Φ nicht kontrahierend!

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)|\,|x-y| \le L\,|x-y|$$

Beispiel: Betrachte die Funktion $\Phi(x) = e^{-x}$. Dann gilt

$$\Phi'(x) = -e^{-x}$$

Lipschitz–Konstante

$$L := \sup\{|e^{-x}| \ : \ a \le x \le b\}$$

Banachscher Fixpunktsatz

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum (Banachraum). Ferner sei $D \subset V$ abgeschlossen und $\Phi : D \to D$ eine kontrahierende Abbildung der Menge D in sich mit einer Kontraktionskonstanten L (also $L < 1$). Dann gelten die folgenden Aussagen:

1) Es gibt genau einen Fixpunkt x^* von Φ in D

2) Für jeden Startwert $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunkt–Iteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ gegen den Fixpunkt x^*

3) Es gelten die Fehlerabschätzungen:

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\| \le \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|$$

Beispiel: Berechne den kleinsten Fixpunkt von $\Phi(x) = 0.1e^x$
Setze $D = [-1, 1]$, dann gilt

$$0 < \Phi(x) \leq \frac{\exp(1)}{10} < 1$$

Daher bildet Φ das Intervall $D = [-1, 1]$ auf sich ab.
Weiter gilt

$$\Phi(x) = \Phi'(x) = 0.1e^x$$

Damit ist Φ auf D kontrahierend mit $L := \exp(1)/10$.
Berechne Fixpunkt x^* mit einem absoluten Fehler kleiner oder gleich 10^{-6}:

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\| \leq 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{-6}{\log_{10} L} = 10.6062 \ \ldots$$

Tatsächlich ergibt sich nach 11 Iterationen eine zehnstellige Genauigkeit.

Bemerkung: Existiert eine abgeschlossen Kugel

$$K = \{x \in V \mid \|x - y_0\| \leq r\}$$

mit den Eigenschaften

1) $\Phi : K \to V$ ist kontrahierend mit Konstraktionskonstante $L < 1$
2) $\|\Phi(y_0) - y_0\| \leq (1 - L)r$

so gilt $\Phi(K) \subset K$ und der Fixpunktsatz lässt sich mit $D = K$ anwenden.

Beweis: Betrachte ein $y \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|\Phi(y) - y_0\| &\leq \|\Phi(y) - \Phi(y_0) + \Phi(y_0) - y_0\| \\ &\leq L\|y - y_0\| + (1 - L)r \\ &\leq r\end{aligned}$$

Kapitel 6: Potenzreihen und elementare Funktionen

6.1 Gleichmäßige Konvergenz

Sei $(f_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Funktionen mit $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$

Definition: Zur Konvergenz von Funktionenfolgen definieren wir

1) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert **punktweise** gegen eine Funktion f, falls gilt:

$$\forall\, z \in D \quad : \quad \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$$

2) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert **gleichmäßig** gegen eine Funktion f, falls

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left[\sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)|\right] = 0$$

Beispiel: Betrachte die Funktionenfolge (f_n) definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & : \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \\ 0 & : \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Diese Folge konvergiert offensichtlich gegen die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x = 0 \\ \\ 0 & : \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Die Konvergenz ist aber **nicht** gleichmäßig, denn

$$\|f_n - f\|_\infty = 1 \qquad \forall\, n \geq 0$$

Jede Funktion $f_n(x)$ der Folge ist außerdem **stetig**.

Die Grenzfunktion f ist **nicht** stetig!

Beispiel: Wir betrachten die Funktionfolge

$$f_n(x) = nx\exp(-nx) \qquad n \geq 1$$

Die Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen $f(x) = 0$, allerdings:

$$f_n'(x) = n\exp(-nx) - n^2 x\exp(-nx) = n\exp(-nx)(1 - nx)$$

Aus $f_n'(x) = 0$, folgt $x = 1/n$. Weiter gilt:

$$f_n''(1/n) < 0$$

Das Maximum der Funktion $f_n(x)$ liegt bei $x = 1/n$ mit

$$f_n(1/n) = \exp(-1) \qquad \forall\, n \geq 1$$

Satz: Konvergiert eine Funktionfolge (f_n) mit $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f und sind die Funktionen f_n stetig auf D, so ist auch die Grenzfunktion stetig auf D.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und n so gewählt, dass

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$$

Weiter sei $\delta > 0$ so gewählt, dass

$$\forall\, z \in D \quad : \quad \|z - z_0\|_\infty < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Satz: Gleichmäßige Konvergenz von Reihen von Funktionen

1) **Majorantenkriterium von Weierstraß**

   Gegeben seien Funktionen $f_k : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$. Gilt dann für $b_k \in \mathbb{R}$: $\quad \forall\, z \in D \quad : \quad |f_k(z)| \leq b_k \quad \wedge \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$,
   so ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ gleichmäßig und absolut konvergent auf D.

2) Sind die Funktionen $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $[a, b]$ und die beiden Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k'(z)$ gleichmäßig konvergent, so ist auch $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ differenzierbar mit

   $$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(z)$$

   für alle $x \in [a, b]$.