Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(x) := \dfrac{3}{7-2x}$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ und geben Sie das Konvergenzintervall dieser Entwicklung an.

Hinweis: Geometrische Reihe.

b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{5x^2+2x+6}{x^2+1}\,dx\,.$$

Lösung der Aufgabe 1:

a)

$$f(x) = \frac{3}{7-2(x-2)-4} = \frac{3}{3-2(x-2)} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}(x-2)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k (x-2)^k.$$

Da die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ genau dann konvergiert, wenn $|q| < 1$ gilt, konvergiert die Potenzreihe für

$-1 < \left|\frac{2}{3}(x-2)\right| < 1 \iff 0.5 < x < 3.5\,.$

b) Polynomdivision liefert

$$\begin{array}{l} (5x^2+2x+6) : (x^2+1) = 5 + \dfrac{2x+1}{x^2+1} \\ \underline{-(5x^2+5)} \\ \quad\; 2x+1 \end{array}$$

Und man erhält

$$\int \frac{5x^2+2x+6}{x^2+1}dx = \int 5 + \frac{2x+1}{x^2+1}dx$$
$$= \int 5dx + \int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx = 5x + \ln(x^2+1) + \arctan x + C$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f : [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} 2, & -\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die π–periodische Fortsetzung von f im Bereich $-\pi \le t \le 2\pi$.

b) Berechnen Sie die reellen Fourier–Koeffizienten der π–periodischen Fortsetzung von f und geben Sie die ersten vier (nicht verschwindenden) Summanden der Fourier–Reihe explizit an.

Hinweis: a_0 ist gesondert zu berechnen.

Lösung der Aufgabe 2:

a) Skizze:

b) f ist eine gerade Funktion, also gilt

$$\begin{aligned} b_k &= 0 \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N} \\ a_k &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega t)\, dt \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cdot \cos\left(k \frac{2\pi}{\pi} t\right) dt + \frac{4}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 0 \cdot \cos\left(k \frac{2\pi}{\pi} t\right) dt \\ &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2kt) \end{aligned}$$

Für $k = 0$ erhält man

$$a_0 = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dt = \frac{8}{\pi} [t]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2$$

und für $k > 0$ ergibt sich

$$a_k = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2kt) dt = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{k} \sin(2kt)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

Es folgt

$$a_k = \begin{cases} 2 & k = 0 \\ 0 & k = 2m,\ m \in \mathbb{N} \\ \frac{4}{\pi(2m+1)}(-1)^m & k = 2m+1,\ m \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

und somit

$$a_0 = 2 \qquad a_1 = \frac{4}{\pi} \qquad a_3 = -\frac{4}{3\pi} \qquad a_5 = \frac{4}{5\pi}.$$

Die ersten vier nicht verschwindenden Summanden der Fourier-Reihe lauten

$$1 + \frac{4}{\pi}\cos(2t) - \frac{4}{3\pi}\cos(6t) + \frac{4}{5\pi}\cos(10t).$$