Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SS 2003**
Prof. Dr. W. Hofmann

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

a) Zeigen Sie für die Umkehrfunktion von $\sin x$ im Intervall $(-1, 1)$ die Differentiationsregel
$$\frac{d}{dx} \arcsin x = (1 - x^2)^{-1/2}.$$

b) Zeigen Sie, dass
$$\binom{-1/2}{n} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2n)}.$$

c) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) die Potenzreihe von $\arcsin x$ und ihren Konvergenzradius.
Hinweis: Binomialreihe.

d) Konvergiert die Reihe in den Randpunkten des Konvergenzintervalls?
Hinweis: Man zeige: Für jedes feste n sind die Teilsummen $s_n(x)$ der Potenzreihe für jedes $x : 0 < x < 1$ beschränkt (wodurch?).

Aufgabe 10:

Für die durch ihre Potenzreihe definierte sin-Funktion zeige man

a) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

b) $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \ = (\sin x \cosh y) + i(\cos x \sinh y)$ mit $z = x + iy$
(Zerlegung in Real- und Imaginärteil)

c) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

d) $\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$

Aufgabe 11:
Man definiert wie im Reellen die Potenzreihen für $\tan z$ und $\cot z$

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}.$$

a) Man zeige, dass $\frac{z}{e^z - 1} - \frac{z}{2}$ eine gerade Funktion ist.
Welche Auswirkungen hat dies für die Bernoulli-Zahlen?

b) Man zeige $\cot z = i + \frac{2i}{e^{2iz} - 1}$

c) Unter Verwendung der Potenzreihe für $\frac{z}{e^z - 1}$ bestimme man die Potenzreihe für $\cot z$. Was für eine Singularität hat $\cot z$ im Nullpunkt?

d) Man zeige $\tan z = \cot z - 2\cot 2z$ (das Additionstheorem für $\cos$ darf auch ohne Beweis verwendet werden) und bestimme daraus die Potenzreihenentwicklung von $\tan z$.

Aufgabe 12:
Gegeben seien die Daten $(x_i, y_i) : \left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{8}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right), (1, 2), (2, 23)$.

a) Man berechne (von Hand) mittels dividierter Differenzen die Newton-Form des Interpolationspolynoms $p(x)$ zu diesen Daten. Welchen Wert hat $p(0)$?

b) Für die inversen Daten (y_i, x_i) (man vertausche x_i und y_i des obigen Datensatzes) berechne man mit dem Schema von Aitken-Neville den Wert des zugehörigen Interpolationspolynoms $\tilde{p}(y_i)$ an der Stelle $y_i = 0$.

c) Man zeichne $p(x)$ über der x-Achse und $\tilde{p}(y)$ über der y-Achse. Welche Bedeutung kann man $\tilde{p}(0)$ für das Polynom $p(x)$ zuschreiben? Warum?