Fachbereich Mathematik
Priv.Doz. Dr. I. Gasser
Prof. Dr. H. J. Oberle

SS 2001

A n a l y s i s II

4. Übung

Aufgabe 13:

Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{2\,x + a}{\sqrt{x^2 + a\,x}}\;dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}}\;dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\;dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x\;\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\;dx$

e) $\displaystyle\int x^3\,\sqrt{1 + x^2}\;dx$ f) $\displaystyle\int x\;\ln(x^2 - 1)\;dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1 + \sqrt{1 + x^4}}\;dx$ h) $\displaystyle\int \frac{x^3 + x^2 + 2\,x + 3}{\sqrt{x}}\;dx$.

Aufgabe 14:

Man berechne den Flächeninhalt der drei endlichen Flächen zwischen $y = x^2 - 1$ und $x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe 15:

Für den Abfluss $w(t)$ eines aperen Gletschers gilt unter vereinfachenden Annahmen die Beziehung

$$w(t) \;=\; \nu \int\limits_{t-\sigma}^{t} E(\tau)\,d\tau$$

wo ν einen Proportionalitätsfaktor, σ die maximale Abflussdauer und $E(t)$ die zur Zeit t zur Verfügung stehende Schmelzenergie (alle Zeiten in Stunden) bezeichnet. Für

$$E(t) \;:=\; \begin{cases} -\cos(2\,\pi\,t/24), & \text{für} \quad 6 \le t < 18 \\ 0, & \text{für} \quad -6 \le t \le 6 \;\text{ und }\; 18 \le t \le 24, \end{cases}$$

$\nu = 1$ und $\sigma = 6$ berechne man den Abfluss $w(t)$ im Zeitraum $0 \le t \le 24$.

Man skizziere $E(t)$ und $w(t)$.

Aufgabe 16:

Für eine senkrecht aufsteigende Rakete mit Gewicht $G = m\,g_0$ und Schubkraft $T = c\,\beta$ gelten (bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes und der Höhenabhängigkeit der Erdbeschleunigung) die folgenden Bewegungsgleichungen

$$\dot{h} \;=\; v, \qquad \dot{v} \;=\; \frac{c}{m}\,\beta \,-\, g_0, \qquad \dot{m} \;=\; -\beta$$

Dabei bezeichnet h die Höhe, v den Geschwindigkeitsbetrag und m die Masse der Rakete (jeweils als Funktion der Zeit t). Als Konstante werden betrachtet: g_0: Erdbeschleunigung, β: Massendurchsatz der Triebwerke und c: äquivalente Ausströmgeschwindigkeit.

a) Man bestimme die Lösung der Bewegungsgleichungen zu den Anfangsbedingungen

$$h(0) \;=\; 0,\;\; v(0) \;=\; 0,\;\; m(0) \;=\; m_0 \;>\; 0.$$

b) Für den Raketenstart stehe eine bestimmte Treibstoffmenge $\Delta m = m(0) - m(t_f)$ zur Verfügung. Zur Zeit t_f sei diese Treibstoffmenge gerade verbraucht. Man berechne $v(t_f)$ und $h(t_f)$ in Abhängigkeit von Δm und β und bestimme dem Massendurchsatz β so, dass $h(t_f)$ maximal wird.

c) Man skizziere den Verlauf von $h(t)$, $v(t)$ und $m(t)$ (MATLAB). Daten: $m_0 = 215$ kg, $\Delta m = 147$ kg, $c = 2.06$ km/s, $g_0 = 0.00981$ km/s^2. Für den Massendurchsatz wähle man einmal $\beta = \beta_{\text{opt}}$ aus b) und zum anderen $\beta = \beta_{\max} = 9.5$ kg/s.

d) Nach der Antriebsphase $[0, t_f]$ erfolgt der weitere Aufstieg ohne Antrieb ($\beta = 0$). Zur Zeit $T > t_f$ werde dabei die maximale Höhe erreicht. Man bestimme den (konstanten) Massendurchsatz $\beta \in]0, \beta_{\max}]$ während der Antriebsphase so, dass $h(T)$ maximal wird.

Abgabetermin: 21.5., 22.5 bzw. 25.5.2001 **vor** der Übung.

Die Übungen am Do. 24.5. (Christi Himmelfahrt) fallen aus. Bitte nehmen Sie Ersatztermine war.