Fachbereich Mathematik **SS 2001**
Priv.Doz. Dr. I. Gasser
Prof. Dr. H. J. Oberle

A n a l y s i s II

1. Übung

Aufgabe 1:

Die (Temperatur-) Strahlungsleistung $E_T(\lambda)$ eines schwarzen Körpers für die Wellenlänge λ bei der absoluten Temperatur T ist durch das *Plancksche Strahlungsgesetz* gegeben:

$$E_T(\lambda) \;=\; \frac{a}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp(\dfrac{b}{\lambda T}) - 1}\,, \qquad \lambda > 0.$$

Dabei sind a, $b > 0$ Konstante.

a) Man bestimme die Grenzwerte $\lim\limits_{\lambda \to 0+} E_T(\lambda)$, $\lim\limits_{\lambda \to \infty} E_T(\lambda)$.

b) Man zeige, dass die Funktion $E_T(\lambda)$ für festes T genau ein globales Maximum in einem Punkt $\lambda_{\max}(T)$ besitzt.

c) Man beweise das *Wiensche Verschiebungsgesetz*:

$$\lambda_{\max}(T) \cdot T \;=\; c \;=\; \text{konstant}$$

und berechne $E_T(\lambda_{\max}(T))$.

Bemerkungen: Max Planck: 1858 – 1947; Wilhelm Wien: 1864 – 1928; $c = 2898\,\mu\mathrm{m\,K}$.

Aufgabe 2:

Gesucht sei die positive Lösung x^* der Gleichung

$$x \;=\; \sqrt{x} + 1.$$

a) Man gebe ein Intervall an, so dass die Fixpunktiteration $x_{n+1} = \sqrt{x_n} + 1$ für alle Startwerte aus diesem Intervall gegen x^* konvergiert.

b) Wieviele Iterationen benötigt man, um ausgehend von $x_0 = 16$ den gesuchten Wert mit einem absoluten Fehler von maximal 10^{-4} zu berechnen?

c) Man führe die Iteration durch und überprüfe die Genauigkeit der Iterierten mit Hilfe der a-posteriori-Fehlerabschätzung.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 2 + 0.5 \ln x - \frac{1}{2\,x} - x.$$

Nach Analysis I, Aufgabe 18, besitzt f genau zwei positive Nullstellen x_1^*, x_2^*.

a) Zur Berechnung dieser Nullstellen konstruiere man geeignete Fixpunktverfahren und überprüfe hierfür jeweils die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.

b) Man berechne jeweils die Näherungen x_{10}, wobei als Startwerte $x_0 = 0.4$ und $x_0 = 2$ gewählt werden sollen. Man führe a-priori- und a-posteriori- Fehlerabschätzungen durch.

Aufgabe 4:

Man untersuche die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

a) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = n\,x\,\exp(-n\,x),$

b) $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x\,(1-x)^k,$

c) $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$

Abgabetermin: 9.4., 10.4. bzw. 12.4.2001 **vor** der Übung.

Die Teilnehmer/innen der Freitagsgruppen bitten wir, in dieser Woche an anderen Übungsgruppen teilzunehmen.