Analysis II vom 15.9.2000, Dekanate ET,MB,VT

Stammfunktionen dürfen nicht einer Formelsammlung entnommen werden, sondern sollen berechnet werden.

Aufgabe 1:

a) Man berechne die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^2 x\right)^{2n}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+4}\,x^n$.

b) Man berechne $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx$.

c) Gegeben sei die Funktion $f:\ [-2,2[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\begin{cases} x & , \quad x\in[-1,1[\\ 0 & , \quad x\in[-2,-1[\,\cup\,[1,2[\,. \end{cases}$$

(i) Man skizziere die 4−periodische Fortsetzung von f.

(ii) Man berechne die Fourierreihe der 4−periodischen Fortsetzung von f.

(iii) Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe im Punkt $x=1$?

Aufgabe 2:

a) Man löse die folgenden unbestimmten Integrale:

(i) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+7}{x^3-3x^2+4x-12}\,dx$,

(ii) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$.

b) Gegeben seien die durch $f(x)=\dfrac{10}{(x-6)^2}$ gegebene Funktion, sowie die Intervalle $D_1=[0,1]$, $D_2=[4,5[$ und $D_3=[7,8]$.

(i) Man zeige, dass f in den obigen Intervallen D_i Fixpunkte besitzt.

(ii) In welchem der obigen Intervalle D_i konvergiert die Fixpunktiteration $x_{k+1}=f(x_k)$ für $k=0,1,2,\ldots$ mit $x_0\in D_i$ aufgrund des Fixpunktsatzes?