Aufgabe 1:

Gegeben sei die durch

$$f(x) = \exp\left(x + \frac{9}{x-4}\right)$$

definierte reellwertige Funktion. Dabei bezeichnet exp die e-Funktion, d.h. $\exp(x) = e^x$.

a) Man gebe den maximalen Definitionsbereich D von f an.

b) Wie viele Nullstellen besitzt f.

c) Man berechne $\lim\limits_{x\to 4+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to 4-} f(x)$.

d) Man untersuche das Verhalten von f im Unendlichen.

e) Man untersuche das Monotonieverhalten von f im Definitionsbereich D.

f) Man bestimme alle lokalen Extrema von f.

g) Wie lautet das Taylor-Polynom $T_1(x; x_0)$ von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 13$.

Aufgabe 2:

a) Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz

(i) $\frac{3}{5} + \frac{6}{9} + \frac{9}{13} + \frac{12}{17} + \frac{15}{21} + \cdots,$

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 4^{n+1}}{5^{n+1}}.$

b) Man berechne den Grenzwert der Folge $a_n = \sqrt{n^8 + 4n^4} - \sqrt{n^8 + 7n^3}$, falls er existiert.

c) Man beweise z.B. durch vollständige Induktion

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{2}{j^2 - 1} = \frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)}\,.$$