

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reiner Lauterbach
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2004/2005
Basierend auf der Vorlesung von
Jens Struckmeier (WS 2001/02)

4.2 Differentialrechnung einer Variablen

Zunächst: Einleitung auf Folie

Sekantensteigung und Differenzenquotient

liefern im Grenzwert

Tangentensteigung und Ableitung

(Differentialquotient)

Definition: Gegeben sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}$ und ein $x_0 \in D \cap D'$.

- 1) Für ein $x \in D$, $x \neq x_0$ nennt man den Ausdruck

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Differenzenquotient (Sekantensteigung) bezüglich des Punktes x_0 .

- 2) Die Funktion $f(x)$ heißt **differenzierbar** im Punkt x_0 , falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Man nennt den Grenzwert dann

die Ableitung oder den Differentialquotienten

der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 und schreibt

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definition: (Fortsetzung)

- 3) Die einseitigen Grenzwerte (falls existent)

$$f'(x_0^+) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0^-) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißen **rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung** von $f(x)$ an der Stelle x_0 .

Eine **Interpretation** der Ableitung einer Funktion:

Die Bewegung eines Massenpunktes sei beschrieben durch eine Funktion

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c = c(t), \quad I \subset \mathbb{R}$$

wobei t die Zeit und $c(t)$ den Ort des Massenpunktes bezeichnet.

Die Ableitung

$$\dot{c}(t_0) := \frac{dc}{dt}(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$$

ist dann die

Geschwindigkeit

mit der sich der Massenpunkt bewegt.

Einseitige Ableitungen treten z.B. bei Reflektion auf! Dort ist zwar c (d.h. die Bewegung) stetig, nicht aber die Geschwindigkeit.

Beispiele zur Berechnung der Ableitung:

1) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Dann gilt für beliebige $x, x_0 \in \mathbb{R}$

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j$$

Damit erhält man:

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j = nx_0^{n-1}$$

Die Funktion $f(x) = x^n$ ist damit auf ganz \mathbb{R} differenzierbar und

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Beispiele zur Berechnung der Ableitung: (Fortsetzung)

- 2) Sind die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar, so sind auch

$$f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad \lambda f(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

differenzierbare Funktionen.

- 3) Aus 2) und $f'(x) = 0$ für $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$, folgt

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) = \sum_{k=1}^n a_k k x^{k-1}$$

- 4) Bei vektorwertigen Funktionen wird die Ableitung **komponentenweise** berechnet, zum Beispiel

$$f(x) = (x, e^x, \sin x)^T \Rightarrow f'(x) = (1, e^x, \cos x)^T$$

$$f(x) = (\cos t, \sin t)^T \Rightarrow f'(t) = (-\sin t, \cos t)^T$$

Beispiele zur Berechnung der Ableitung: (Fortsetzung)

- 5) Ableitungen von **elementaren** Funktionen

Funktion	Ableitung
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$
e^x	$e^x \quad (x \in \mathbb{R})$
$\ln x$	$\frac{1}{x} \quad (x > 0)$
$\sin x$	$\cos x \quad (x \in \mathbb{R})$
$\cos x$	$-\sin x \quad (x \in \mathbb{R})$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$

Satz: (Wichtige Differentiationsregeln)

- 1) Ist $f : D \rightarrow W$, $D \subset \mathbb{R}$ in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so ist die Funktion dort auch stetig.
- 2) Sind $f, g : D \rightarrow W$, $D \subset \mathbb{R}$ in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so ist für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ auch $\alpha f + \beta g$ in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

- 3) Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{R}$ in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so ist auch die Funktion $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die **Produktregel**:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist $\frac{f(x)}{g(x)}$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die

Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

- 4) Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($D, E \subset \mathbb{R}$) und $x_0 \in D^0 \cap (f^{-1}(E))^0$. Sind f, g in x_0 bzw. $f(x_0)$ differenzierbar, so ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die **Kettenregel**:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

- 5) Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (y_0 = f(x_0))$$

- 6) Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform, und sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}$ in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so ist die Funktion $\langle f, g \rangle$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die **verallgemeinerte Produktregel**:

$$\left. \frac{d}{dx} \langle f(x), g(x) \rangle \right|_{x=x_0} = \langle f'(x_0), g(x_0) \rangle + \langle f(x_0), g'(x_0) \rangle$$

Definition: Ist eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow W$ in jedem Punkt $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar, so ist die Ableitung wiederum eine Funktion

$$f' : (a, b) \rightarrow W$$

Ist f' wiederum differenzierbar, so erhält man hiermit die zweite Ableitung f'' von f , u.s.w.

Ist $f(x)$ n -mal differenzierbar auf (a, b) und ist zudem die n -te Ableitung $f^{(n)}(x)$ auf dem Intervall (a, b) stetig, so heißt die Funktion $f(x)$ **n -mal stetig differenzierbar** oder auch **C^n -Funktion**.

Gilt dies sogar für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, so nennt man $f(x)$ eine **C^∞ -Funktion**.

$$f \in C^0([a, b]) \quad :\Leftrightarrow \quad f \text{ stetig auf } [a, b]$$

$$f \in C^n((a, b)) \quad :\Leftrightarrow \quad f \text{ } n\text{-mal stetig differenzierbar auf } [a, b]$$

$$f \in C^\infty((a, b)) \quad :\Leftrightarrow \quad f \text{ beliebig oft stetig differenzierbar auf } [a, b]$$