Analysis I für
Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reiner Lauterbach
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2004/2005
Basierend auf der Vorlesung von
Jens Struckmeier (WS 2001/02)

3.3 Folgen in Vektorräumen

In Abschnitt 3.2: Konvergenzkriterien für reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}$
Sei nun $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.
Wiederholung aus Abschnitt 3.2:

Definition: Konvergenz von Folgen
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V (Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$)

$\ldots$

3) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent** mit **Grenzwert (Limes)** $a \in V$, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;:\; \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n \geq N \;:\; \|a_n - a\| < \varepsilon$$

$\ldots$

Beispiel: (Unendlich–dimensionale) Funktionenräume

Endlich–dimensionale Vektorräume (zum Beispiel $\mathbb{R}^n$)

Satz: (Normäquivalenzsatz)

Je zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ eines endlichdimensionalen Vektorraums V sind **äquivalent**, d.h. es gibt positive Konstanten $C_1, C_2 > 0$ mit

$$\forall\, v \in V \quad : \quad C_1\|v\| \leq \|v\|' \leq C_2\|v\|$$

Konvergenz und Grenzwert einer Folge sind unabhängig von der Norm.

Folgerung: Eine Folge $(\mathbf{x}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn alle n Koordinatenfolgen $(x_j^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$, $j = 1, \ldots, n$ konvergieren. Der Grenzwert der Folge lässt sich komponentenweise berechnen.

Beispiel:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}, 1+\exp\left(\frac{1}{n}\right), \frac{n^2+2n+3}{2n^2-1}\right)^T = \left(0, 2, \frac{1}{2}\right)^T$$

In endlichdimensionalen Vektorräumen gelten daher auch

- das **Cauchysche Konvergenzkriterium**

$$\exists\,\mathbf{a}\ :\ \mathbf{a}_m \to \mathbf{a}\ (m\to\infty)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon)\ :\ m, n \geq N\ :\ \|\mathbf{a}_m - \mathbf{a_n}\| \to 0$$

- und der **Satz von Bolzano, Weierstraß**

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge

Beispiel: Für $a_n := z^n$, $z \in \mathbb{C}$ gegeben, gilt

$$|z| > 1 \quad\Rightarrow\quad |a_n| = |z|^n \text{ unbeschränkt } \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ divergent}$$

$$|z| < 1 \quad\Rightarrow\quad |a_n| = |z|^n \to 0\ (n\to\infty) \quad\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z^n = 0$$

3.4 Konvergenzkriterien für Reihen

Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine vorgegebene Folge mit $a_n \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

eine

Reihe (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

Die Elemente s_n der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nennt man auch **Partialsummen**.

Ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, so bezeichnet

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := s$$

den **Grenzwert der Reihe**.

Satz: (Konvergenzkriterien für Reihen)

1) **Cauchysches Konvergenzkriterium**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \;:\; m, n \geq N \;:\; \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

2) **Notwendige Bedingung**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

3) **Linearität**

Sind $\sum a_k$, $\sum b_k$ konvergente Reihen, so konvergieren auch die Reihen $\sum(a_k + b_k)$, $\sum(\lambda a_k)$, und es gelten

3) **Linearität** (Fortsetzung)

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

4) **Leibnizsches Kriterium**

Alternierende Reihen der Form $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$, $a_k \geq 0$, für die $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, sind konvergent, und es gilt die **Einschließung**:

$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$$

Beweis zu 4): Seien $u_n := \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k a_k \qquad v_n := \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$

Dann folgt

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq u_n \\ v_{n+1} &= v_n - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq u_n \\ v_n &= u_n + a_{2n} \geq u_n \\ v_n - u_n &= a_{2n} \to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden Intervallschachtelung, konvergieren gegen gemeinsamen Grenzwert und

$$u_n \leq \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \leq v_n$$

Beispiel: Die **geometrische Reihe** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots, \quad q \in \mathbb{C}$
konvergiert für $|q| < 1$, denn für die Partialsummen gilt wegen

$$x^m - y^m = (x-y)\sum_{j=1}^{m} x^{m-j} y^{j-1}$$

mit $x = 1$, $y = q$ und $m = n + 1$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

Daraus folgt

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}}$$

Für $|q| > 1$ ist die geometrische Reihe divergent.

Beispiel: Die **harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

ist divergent.

Es gilt

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{m} = \frac{m-n+1}{m} \to 1 \quad (m \to \infty)$$

Damit ist das Cauchy–Kriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \; : \; m, n \geq N \; : \; \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

für $\varepsilon < 1$ verletzt.

Beispiel: Die **alternierende harmonische Reihe** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ ist konvergent.

Dies zeigt man mit Hilfe des Leibnizschen Kriteriums.

Zur Erinnerung: **alternierende Reihen**, deren Folgenglieder eine Nullfolge mit monoton fallenden Beträgen bilden, sind konvergent.

Der Grenzwert lautet:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1} = \ln 2 = 0.69314 \ldots$$

Definition: Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, falls die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

ist konvergent, aber **nicht** absolut konvergent. Es gilt

$$a_k = (-1)^k \frac{1}{k+1}$$

und daher ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|(-1)^k \frac{1}{k+1}\right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

gerade die harmonische Reihe, die **nicht** konvergiert.

Satz: (Kriterien für absolute Konvergenz)

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Leftrightarrow$ $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|\right)_{n\geq 0}$ beschränkt.

2) **Majorantenkriterium**

$$|a_k| \leq b_k \;\wedge\; \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

3) **Quotientenkriterium** Sei $a_k \neq 0$ $(\forall\, k \geq k_0)$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1 \quad (\forall\, k \geq k_0) \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

4) **Wurzelkriterium**

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \quad (\forall\, k \geq k_0) \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

Beweis:

zu 1): Die Folge $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|\right)$ ist monoton wachsend und daher genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

zu 2): Da $|a_k| \leq b_k$ für alle k gilt, ist $b_k \geq 0$. Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ ist nach Voraussetzung konvergent, wegen $b_k \geq 0$ aber auch absolut konvergent.

Nach Teil 1) ist die Folge $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\right)$ damit beschränkt. Aus

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

folgt dann, dass die Folge $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|\right)$ beschränkt und nach Teil 1) absolut konvergent ist.

Beweis: (Fortsetzung)

zu 3): Aus $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q \; (\forall\, k \geq k_0)$ folgt mit vollständiger Induktion direkt

$$|a_k| \leq q^{k-k_0}|a_{k_0}|$$

und somit für alle n

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}|a_k| &\leq \sum_{k=0}^{k_0-1}|a_k| + |a_{k_0}|\sum_{j=0}^{n-k_0} q^j \\ &\leq \underbrace{\sum_{k=0}^{k_0-1}|a_k| + |a_{k_0}|\frac{1}{1-q}}_{\text{Beschränktheitskonstante}}\end{aligned}$$

Nach Teil 1) ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beweis: (Fortsetzung)

zu 4): Aus $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \; (k \geq k_0)$ folgt direkt $|a_k| \leq q^k$ für alle $k \geq k_0$. Wie in Teil c) folgt daraus

$$\sum_{k=0}^{n}|a_k| \leq \sum_{k=0}^{k_0-1}|a_k| + |a_{k_0}|\frac{q^{k_0}}{1-q} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{absolut konvergent}$$

Bemerkung:

a) Das Quotienten– bzw. Wurzelkriterium ist erfüllt, falls gilt

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

b) Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist dagegen divergent, falls gilt

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} > 1$$

Beispiel: Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Es gilt

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Die Reihe ist also (absolut) konvergent.

Beispiel: Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \qquad (r \in \mathbb{N}, r \geq 2)$$

Nach dem letzten Beispiel gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r} \quad &\leq \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &< \quad 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} < 2 \end{aligned}$$

Damit ist die Reihe (absolut) konvergent.

Einige Grenzwerte

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$$