Analysis I für
Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reiner Lauterbach
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2004/2005
Basierend auf der Vorlesung von
Jens Struckmeier (WS 2001/02)

5.4 Fixpunkt–Iteration

Nochmals: Iterative Lösung der (nichtlinearen) Gleichung

$$f(x) = 0$$

Abschnitt 3.1 der Vorlesung:

- Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung)
- Newton–Verfahren

Iteratives Verfahren: Fixpunkt–Iteration mit Verfahrensfunktion Φ

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

und

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_k) = \Phi(\lim_{k\to\infty} x_k) = \Phi(x^*)$$

Fixpunkt–Iteration: Löse statt $f(x) = 0$ das Fixpunkt–Problem

$$x = \Phi(x)$$

mittels der Iteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Aber: Verfahrensfunktion Φ ist nicht eindeutig!

Beispiel: Suche im Intervall $(0, \pi/2)$ die eindeutige Nullstelle von

$$f(x) := 2x - \tan x$$

1. Iteration mittels

$$2x - \tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \tan x =: \Phi_1(x)$$

2. Iteration mittels

$$2x - \tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan 2x =: \Phi_2(x)$$

Ergebnis der 1. Iteration und 2. Iteration:

- Iterationen

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \tan x_k \qquad y_{k+1} = \arctan 2y_k$$

- Wähle als Anfangsnäherung in beiden Iterationen

$$x_0 := 1.2 \qquad y_0 := 1.2$$

- Beide Iterationen konvergieren im Grenzwert $k \to \infty$, aber

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0 \qquad \lim_{k\to\infty} y_k = 1.1655\,61185$$

- Berechne die Iterationen mittels eines Computerprogramms

Konvergenzgeschwindigkeit hängt ab von

dem Abstand zwei benachbarter Folgenglieder: $|x_{k+1} - x_k|$

Definition: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.

Eine Abbildung $\Phi : D \to V$, $D \subset V$ heißt **Lipschitz–stetig** auf D, falls eine Konstante L existiert, sodass

$$\forall\, x, y \in D \quad : \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\|$$

Die Konstante L nennt man **die Lipschitz–Konstante**.

Definition: Eine Abbildung $\Phi : D \to V$, $D \subset V$ heißt **kontrahierend**, falls $L < 1$ gilt.

Man nennt dann L die **Kontraktionskonstante** von Φ.

Bemerkung: Jede Lipschitz–stetige Funktion ist stetig!

Es gelte die Abschätzung

$$\forall\, x \neq y \quad : \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \|x - y\|$$

Dann ist Φ nicht notwendigerweise kontrahierend!

Satz: Jede C^1–Funktion $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz–stetig auf $[a, b]$ mit der Lipschitz–Konstanten

$$L := \sup\{|\Phi'(x)| \;:\; a \leq x \leq b\}$$

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)|\,|x - y| \leq L\,|x - y|$$

Satz: Banachscher Fixpunktsatz

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum (Banachraum). Ferner sei $D \subset V$ abgeschlossen und $\Phi : D \to D$ eine kontrahierende Abbildung der Menge D in sich mit einer Kontraktionskonstanten L.
Dann gelten die folgenden Aussagen:

1) Es gibt genau einen Fixpunkt x^* von Φ in D

2) Für jeden Startwert $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunkt–Iteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ gegen den Fixpunkt x^*

3) Es gelten die Fehlerabschätzungen:

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|$$