Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2004/05**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:
Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

$$a_n = \frac{2}{n+2}\left(2n - \frac{n^3+n+3}{n^3}\right), \qquad b_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{6n},$$

$$c_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad d_n = \sqrt{n^4 - 2n^2} - n^2,$$

$$e_n = \frac{\left(\sqrt{i}\right)^n}{n}, \qquad f_n = \frac{\sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right) + 1 + 2n}{n + \cos\left(\frac{n}{n^2+1}\right)}.$$

Aufgabe 10:
Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

a) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + a_n)$

b) $b_1 = \frac{1}{4},\ b_{n+1} = \frac{1}{4} + b_n^2$

c) $c_1 = 3,\ c_{n+1} = \frac{2}{2 - c_n}$

d) $d_1 = 1,\ d_{n+1} = \sqrt{1 + d_n}$

Aufgabe 11:
Man betrachte die Folge t_n, die das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von $f(t) = 100t^2 - 1$ mit dem Startwert $t_0 = 1$ erzeugt. Man zeige, dass

a) die Folge t_n monoton fallend und nach unten beschränkt ist,

b) die Konvergenz der Folge t_n gegen den Grenzwert t^* quadratisch ist, d.h. eine Konstante c existiert mit

$$|t_{n+1} - t^*| \leq c\,|t_n - t^*|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 12:

Man zeige, dass die rekursiv definierte Folge

$$x_0 = a\,, \quad x_1 = b\,, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\,(x_n + x_{n-1})$$

folgende explizite Darstellung besitzt:

$$x_n = \frac{\left(2^{n-1} + (-1)^n\right) a + \left(2^n - (-1)^n\right) b}{3 \cdot 2^{n-1}}\,.$$

Hinweis: Für den Beweis eignet sich die vollständige Induktion.

Abgabetermine: 06.12.-10.12.2002 (zu Beginn der Übung)