Lösung der Aufgabe 1:

a) Begründen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert, und geben Sie eine obere und eine untere Schranke für den Grenzwert an

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)\,(k+2)\,(k+3)} \cdot$$

Mit $a_k = \dfrac{1}{(k+1)\,(k+2)\,(k+3)}$ gilt offensichtlich $a_k > 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Außerdem gilt

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)\,(k+2)\,(k+3)}{(k+2)\,(k+3)\,(k+4)} = \frac{k+1}{k+4} < 1$$

Die Folge der a_k fällt also monoton. Die Reihe konvergiert nach Leibniz. Es gilt

$$\frac{1}{8} = a_0 - a_1 \;\leq\; s \;\leq\; a_0 = \frac{1}{6} \,.$$

b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital

(i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sinh x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cosh x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sinh x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cosh x}{6} = -\frac{1}{6} \,,$$

(ii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x+2}{8x^2+8x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x+5}{16x+8} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \,,$$

(iii)

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{2x^2+5x+2}{6x^2+5x+1} = \lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{4x+5}{12x+5} = \frac{3}{-1} = -3 \cdot$$

c) Prüfen Sie, ob man den Parameter a bzw. b so wählen kann, dass die Funktion f bzw. g auf ganz $\mathbb{R}$ stetig wird.

$$f(x) := \begin{cases} \sin\left(\dfrac{e^x}{x}\right) & : \; x \neq 0 \\ a & : \; x = 0 \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} e^{x-1} & : \; x < 1 \\ bx + 4 & : \; x \geq 1 \end{cases}$$

Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{x} = \pm\infty$. daher existiert $\lim \sin\left(\dfrac{e^x}{x}\right)$ nicht. Die Funktion f kann nicht stetig ergänzt werden.

Wegen $\lim\limits_{x\to 1} e^{x-1} = 1$ kann g durch die Wahl $b = -3$ stetig ergänzt werden.

Lösung zur Aufgabe 2:
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = t^2 + t - 6.$$

a) Zeigen Sie, dass das Newton Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion f mit dem Startwert $t_0 = 3$ die Folge

$$t_0 = 3, \quad t_{n+1} = \frac{t_n^2 + 6}{2t_n + 1}; \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

erzeugt.

Das Newton Verfahren erzeugt die Folge

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)} = t_n - \frac{t_n^2 + t_n - 6}{2t_n + 1} = \frac{2t_n^2 + t_n - t_n^2 - t_n + 6}{2t_n + 1} = \frac{t_n^2 + 6}{2t_n + 1}\,.$$

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $t_n \ge 2$ gilt.

Es ist $t_0 = 3 > 2$. Und für alle $n \ge 0$ gilt

$t_{n+1} \ge 2 \iff t_n^2 + 6 \ge 4t_n + 2 \iff t_n^2 - 4t_n + 4 \ge 0 \iff (t_n - 2)^2 \ge 0\,.$

Die letzte Ungleichung ist aber für alle reellen Zahlen t_n erfüllt.

c) Zeigen Sie, dass die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend ist.

$t_{n+1} = \dfrac{t_n^2 + 6}{2t_n + 1} \le t_n \iff t_n^2 + 6 \le 2t_n^2 + t_n \iff 6 \le t_n^2 + t_n\,.$

Die letzte Ungleichung ist für alle $t_n \ge 2$ erfüllt. Also fällt die Folge monoton.

d) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und bestimmen Sie den Grenzwert.

Da die Folge monoton fallend und nach unten beschränkt ist, ist sie auch konvergent. Für den Grenzwert muss gelten:

$$t = \frac{t^2 + 6}{2t + 1} \iff 2t^2 + t = t^2 + 6 \iff t^2 + t - 6 = (t-2)(t+3) = 0$$

Wegen $t_n \ge 2$ kommt nur der Grenzwert $t = 2$ in Frage.