Aufgabe 1:

a) Man untersuche die folgenden Reihen mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums auf Konvergenz

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n-1)}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte unter Anwendung der Regeln von l'Hospital.

(i) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{2 + x^2 - 2\cos(x)}{x^2}$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x}{e^{2x}}$.

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die k-te Ableitung von f für alle $k \in \mathbb{N}_0$ durch die Formel

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k\, 2^{k-1}\,(2x-k)}{e^{2x}} \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

gegeben ist.

b) Geben Sie das Taylor-Polynom dritten Grades von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

c) Schätzen Sie den absoluten Fehler $|f(x) - T_3(x;0)|$ im Intervall $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ nach oben ab.