

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 6

Aufgabe 21:

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ x & \text{für } x < 0 \end{cases} .$$

Ist der Mittelwertsatz

$$g'(x_0) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \quad \text{mit } x_0 \in]a, b[$$

für $a = -\frac{\pi}{2}$ und $b = \frac{\pi}{2}$ auf f bzw. f' anwendbar?

b) Man zeige mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion

$$h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad h(x) = \ln x + 2 - x$$

mindestens zwei Nullstellen besitzt und mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass sie höchstens zwei und damit dann genau zwei Nullstellen besitzt.

Aufgabe 22:

Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x) = (1 + 2x)^{-1/2} \quad \text{und } x > -\frac{1}{2} .$$

a) Man gebe eine allgemeine Darstellung für die Ableitungen $f^{(k)}(x)$ mit $k \in \mathbb{N}$ an.

b) Wie lautet die Taylor-Entwicklung von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$?

c) Zur Approximation von $f\left(\frac{1}{4}\right)$ wird die Taylor-Entwicklung nach dem Term vierter Ordnung abgebrochen. Man gebe eine Abschätzung für den absoluten Fehler an und berechne zum Vergleich $f\left(\frac{1}{4}\right)$ und $T_4\left(\frac{1}{4}; 0\right)$.

Aufgabe 23:

Man berechne gegebenenfalls mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital die Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x},$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3 - 1}},$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right),$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right).$

Aufgabe 24: (alte Klausuraufgabe)

Gegeben sei die durch

$$f(x) = \ln \left| x + \frac{1}{x} \right|$$

definierte reellwertige Funktion.

Man diskutiere die Funktion f . Dazu bestimme man im Einzelnen: Definitionsbereich, Symmetrie, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, Verhalten im Unendlichen, Nullstellen, Monotonieverhalten, Extrema, Konvexität und Wendepunkte. Abschließend skizziere man den Graphen von f .

Abgabetermin: 3.2. - 6.2. (zu Beginn der Übung)