Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2002/03**
Prof. Dr. W. Hofmann

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

a) Sei $(\boldsymbol{x}^n) \subset \mathbb{R}^m$ eine Folge und $\|.\|$ eine Vektornorm.

(i) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, daß folgende Aussage falsch ist:

$$(\boldsymbol{x}^n) \text{ konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \|\boldsymbol{x}^n\| \text{ konvergiert.}$$

(ii) Zeigen Sie jedoch: $\lim\limits_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x}^n\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}^n = 0\,.$

b) Untersuchen Sie die Konvergenz folgender Folgen

(i) $$\boldsymbol{x}^n = \left(\frac{2^n n^2}{3^n}, \frac{n^2}{n^2+1}, \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}\right)^T, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

(ii) $$\boldsymbol{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_n \sin y_n \\ x_n \cos y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Tip: Eine geeignete Norm erleichtert das Leben.

Aufgabe 14:

Schreiben Sie folgende Reihen in der Summenschreibweise und untersuchen Sie ihr Konvergenzverhalten.

a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{11} + \ldots,$

b) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^1 + \left(\dfrac{2}{7}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{9}\right)^3 + \left(\dfrac{4}{11}\right)^4 + \ldots,$

c) $\dfrac{10}{1!} + \dfrac{10^2}{3!} + \dfrac{10^3}{5!} + \dfrac{10^4}{7!} + \ldots,$

d) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{2^2+1} + \dfrac{3}{3^2+1} - \dfrac{4}{4^2+1} \pm \ldots.$

Aufgabe 15:

a) Ermitteln Sie für folgende Mengen D_i jeweils die Menge D_i' aller Häufungspunkte und die Menge D_i^0 aller inneren Punkte. Welche der Mengen sind abgeschlossen bzw. offen?

$$D_1 = \{\tfrac{1}{n};\, n \in \mathbb{N}\} \cup [1,2], \quad D_2 = \{\tfrac{1}{n};\, n \in \mathbb{N}\} \cup [-1,0]\,,$$
$$D_3 =]1,\infty[, \quad D_4 =]-\infty, 0[\times [0,1]\,.$$

b) Bestimmen Sie die Grenzwerte bzw. Häufungspunkte des Bildbereichs folgender Funktionen:

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}, \qquad D_1 = [0,\infty[\setminus \{0\}, \qquad \text{für} \qquad x \to 0,$$

$$f_2(x) = \sqrt{(-x^2)}, \qquad D_2 = \{0\}, \qquad \text{für} \qquad x \to 0,$$

$$f_3(\xi,\eta) = \frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2+\eta^2}, \qquad D_3 = \mathbb{R} \setminus \{0,0\}, \qquad \text{für} \qquad (\xi,\eta) \to (0,0),$$

$$f_4(x) = \left(\frac{1}{x} + \sin x,\ \frac{1}{x} + \cos x\right), \qquad D_4 =]0,\infty[, \qquad \text{für} \qquad x \to \infty.$$

Aufgabe 16:

Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich folgender Funktionen an, ggf. nach einer möglichen (auch einseitigen) stetigen Ergänzung. Berechnen Sie dazu alle einseitigen Grenzwerte der Funktionen. Wo liegen nicht hebbare Unstetigkeiten?

a) $f_1(x) = \log \dfrac{x^2-3x+2}{x+1}\,,$

b) $f_2(x) = \dfrac{|x^2-9|}{x-3}\,,$

c) $f_3(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-2x-3}}\,.$

Abgabetermin: 6.1. - 9.1. (zu Beginn der Übung)