Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2002/03**
Prof. Dr. W. Hofmann
Prof. Dr. Reiner Hass

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:
Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. die Grenzwerte:

$$a_n = \frac{2}{n+2}\left(2n - \frac{n^3+n+3}{n^3}\right), \qquad b_n = \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{6n},$$

$$c_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad d_n = \sqrt{n^4-2n^2} - n^2,$$

$$e_n = \frac{\left(\sqrt{i}\right)^n}{n}, \qquad f_n = \frac{\sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)+1+2n}{n+\cos\left(\frac{n}{n^2+1}\right)}.$$

Aufgabe 10:
Untersuchen Sie die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert:

a) $a_1 = 0\,,\ a_{n+1} = \frac{1}{3}(1+a_n)$

b) $b_1 = \frac{1}{4}\,,\ b_{n+1} = \frac{1}{4} + b_n^2$

c) $c_1 = 3\,,\ c_{n+1} = \frac{2}{2-c_n}$

d) $d_1 = 1,\ d_{n+1} = \sqrt{1+d_n}$

Aufgabe 11:
Betrachten Sie die Folge t_n, die das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von $f(t) = 100t^2 - 1$ mit dem Startwert $t_0 = 1$ erzeugt. Zeigen Sie, dass

a) die Folge t_n monoton fallend und nach unten beschränkt ist,

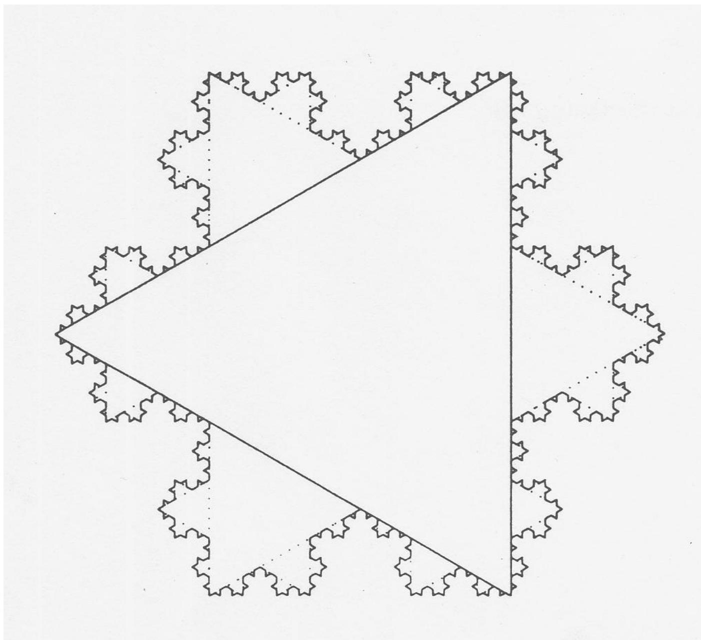
b) die Konvergenz der Folge t_n gegen den Grenzwert t^* quadratisch ist, d.h. eine Konstante c existiert mit

$$|t_{n+1} - t^*| \le c\,|t_n - t^*|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 12:

Auf einem winterlichen Fenster wächst eine Eisblume nach dem folgenden Bildungsgesetz: Die Ausgangsfigur T_1 ist ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1 cm. Die Berandung von T_n nach dem n-ten Zeitschritt entsteht aus T_{n-1} dadurch, dass auf dem mittleren Drittel einer jeden geradlinigen Berandungsstrecke von T_{n-1} ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt wird $(n = 2, 3, 4, \ldots)$.

Man berechne Umfang U_n der entstandenen Figuren T_n und bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$.



Abgabetermine: 09.12.-12.12.2002 (zu Beginn der Übung)