Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2002/03**
Prof. Dr. W. Hofmann
Prof. Dr. Reiner Hass

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|2 - |1 - |x||| \leq 3$;

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\dfrac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} + \dfrac{1 + \frac{1}{x+2}}{1 - \frac{1}{x+2}} < 2$;

c) Bestimmen Sie alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|x - 2| + 2 \leq |y|$.

Aufgabe 6:

Beweisen Sie (z.B. mit vollständiger Induktion)

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

b) $10^n - 3^n$ ist durch 7 teilbar $\quad \forall n \in \mathbb{N}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7:

a) Entscheiden Sie ohne Zuhilfenahme eines (Taschen-)Rechners, welche der beiden Zahlen $\sqrt{6} + \sqrt{26}$ und $\sqrt{13} + \sqrt{17}$ größer ist. Bitte mit Begründung!

b) Auf wieviele Nullen endet die Zahl $100!$? Bitte mit Begründung.

Aufgabe 8:

a) Bestimmen Sie für die Zahlen 7350 und 1260 den ggT und das kgV .

b) Bestimmen Sie die Dualdarstellung der Dezimalzahl 1929 .

c) Bestimmen Sie einen Dezmialbruch der Form $\dfrac{n}{m}$ für die in periodischer Zifferndarstellung gegebenen 4-adischen Zahl $3.\overline{2013}$.

Abgabetermine: 25.11.-28.11.2002 (zu Beginn der Übung)

Euklidischer Algorithmus

Gesucht: $ggT(n,m)\,,\quad n,m\in\mathbb{N}\,.$

I) Divsion

Zu $n,m\in\mathbb{N}$ existieren stets eindeutig bestimmte $q,r\in\mathbb{N}_0$ mit

$$n=q\cdot m+r,\quad 0\le r<m,\quad \text{bzw.}\quad \frac{n}{m}=q+\frac{r}{m}\,.$$

Division mit ganzzahligem Rest r.
Damit betrachten wir den Algorithmus:

II) Iterierte Division

$$r_0:=n\,,\quad r_1:=m$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & r_0=q_1r_1+r_2,\quad r_2<r_1 & r_i,q_i\in\mathbb{N}\quad\forall i.\\
(2) & r_1=q_2r_2+r_3,\quad r_3<r_2 & \\
 & \vdots & \\
(j) & r_{j-1}=q_jr_j+r_{j+1},\quad r_j<r_{j-1} & \text{(allgemeine Vorschrift)}\\
 & \vdots & \\
(k-1) & r_{k-2}=q_{k-1}r_{k-1}+r_k,\quad r_k<r_{k-1} & \\
(k) & r_{k-1}=q_kr_k+\underbrace{0}_{r_{k+1}} &
\end{array}$$

Der Algorithmus endet, da die r_j streng monoton fallen.

Behauptung: $r_k=ggT(n,m)$

Beweis:

1) Wir zeigen zunächst (durch Induktion rückwärts):

$$r_k|n\wedge r_k|m,\quad \text{d.h. } r_k \text{ ist ein gemeinsamer Teiler.}$$

Ind.-Anfang: Aus Gleichung (k) $\Rightarrow r_k|r_{k-1}\overset{(k-1)}{\Longrightarrow} r_k|r_{k-2}$

Ind.-Annahme: $r_k|r_{j+1}\wedge r_k|r_j$

Ind.-Behauptung: $r_k|r_j\wedge r_k|r_{j-1}$

Ind.-Schritt: $j+1\to j\,.$

Der Beweis (also die Induktionsbehauptung) folgt direkt aus Gleichung $(j)\,.$

Beachte: Zum Induktionsschritt braucht man das Wissen über zwei aufeinanderfolgende Indizes.
Deshalb muß die Induktionsverankerung (Ind.-Anfang) auch für 2 aufeinanderfolgende Indizes gemacht werden.

2) Zeige (wieder durch Induktion rückwärts):

r_k hat eine Darstellung

$r_k=$ ganze Zahl $*r_2+$ ganze Zahl $*r_0\quad$ ($\mathbb{Z}$ – Kombination)

Ind.-Anfang: Gleichung (k) und Gleichung $(k-1)$.

Ind.-Annahme: $r_k = r_{j+1}*$ ganze Zahl $+r_j*$ ganze Zahl

Ind.-Behauptung: $r_k = r_j*$ ganze Zahl $+r_{j-1}*$ ganze Zahl

Ind.-Schritt: $j+1 \to j$

Aus (j) folgt $r_{j+1} = r_{j-1} - q_j r_j$

Einsetzen in die Induktionsannahme:

$$\begin{aligned} r_k &= (r_{j-1} - q_j r_j) * \text{ganze Zahl} + r_j * \text{ganze Zahl} \qquad (r_j \text{ ausklammern}) \\ &= r_{j-1} * \text{ganze Zahl} + r_j * \text{ganze Zahl} \end{aligned}$$

Aus dem Beweis folgt insbesondere

$$r_k = \text{ ganze Zahl } * r_1 + \text{ ganze Zahl } * r_0 \ .$$

Hieraus folgt: Jeder Teiler von r_1 und r_0 (also m und n) ist auch Teiler von r_k.

Zusammen mit Beweis 1) gilt also: $r_k = ggT(n, m)$.