Normierte Räume (W. Hofmann WS 02/03)

Definition (Norm)

Sei X ein linearer Raum (Vektorraum). Eine Abbildung $\| \, \| : X \to \mathbb{R}$ heißt Norm, falls

$$\begin{array}{rl} (i) & \|x\| \geq 0, \\ (ii) & \|x\| = 0 \implies x = 0. \\ (iii) & \|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\|. \\ (iv) & \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|. \end{array}$$

Ein *normierter Raum* ist ein linearer Raum mit einer Norm.

Ein vollständiger, normierter Raum heißt *Banachraum*.

Der Abstand $d(x,y)$ zweier Elemente $x, y \in X$ wird mit der Norm definiert durch

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Der Grenzwert einer Folge wird erklärt durch

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \stackrel{Def.}{\iff} \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0.$$

Beachte: Laut Definition ist der Grenzwert einer Folge abhängig von der Norm.

Beispiele für endlichdimensionale Banachräume

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \|x\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,m} |x_i| \, , \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \, , \\ \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, . \end{aligned}$$

Diese Normen werden in der lin. Algebra eingeführt (oder Buch Abschnitt 3.1.). In endlichdimensionalen reellen Räumen konvergiert jede Cauchy-Folge (Folgerung (8.3.6)), was die Vollständigkeit beweist.
Für n=1 reduzieren sich alle oben angegebenen Normen auf den Betrag, der natürlich auch eine Norm ist.
Nach dem Normäquivalenzsatz (Vorlesung bzw. Satz 8.3.2 des Buches) sind alle diese Normen äquivalent (beachte: endlich dimensionale Räume). Man kann auch die Äquivalenzkonstanten angeben (Buch: Aufgabe (8.3.3)).

Beispiele für unendlichdimensionale normierte Räume

C[a,b], der Raum der stetigen Funktionen über dem Intervall $[a,b]$ mit den Normen

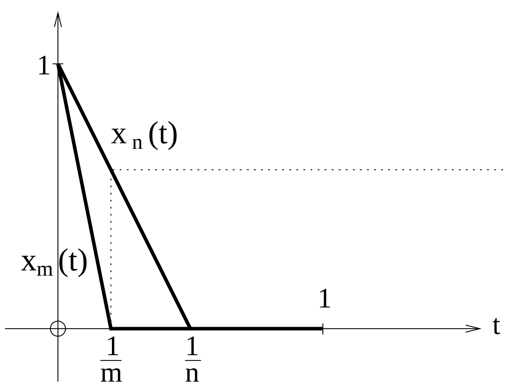
$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &:= \sup_{x\in S} |f(x)|, \\ \|f\|_2 &:= \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx}. \end{aligned}$$

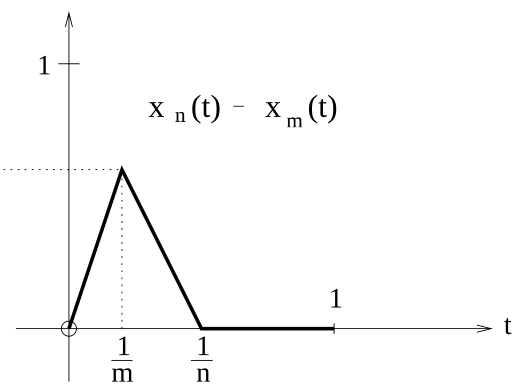
Die Normeigenschaften (i)-(iii) sind für beide Normen offensichtlich.
Die Dreiecksungleichung für die Maximumsnorm beweist man leicht:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_\infty &= \max_{x\in[a,b]}(|f(x)+g(x)|) \le \max_{x\in[a,b]}(|f(x)|+|g(x)|)\\ &\le \max_{x\in[a,b]}|f(x)| + \max_{x\in[a,b]}|g(x|) = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.\end{aligned}$$

Für die Dreiecksungleichung bzgl. der L_2-Norm (sie wird mit Hilfe der Minkowskischen Ungleichung für Reihen bewiesen) verweisen wir auf die Literatur.

In unendlich dimensionalen Räumen sind die Normen im allgemeinen nicht äquivalent, wie folgendes Beispiel zeigt.
Im Raum der stetigen Funktionen $C[0,1]$ (das ist ein Vektorraum) betrachten wir die durch die linke Zeichung definierte Funktionenfolge $x_n(t)$ und die durch die rechte Zeichnung dargestellte Differenz $\|x_n - x_m\|$.





Man erkennt sofort:

$$\|x_n\|_2 = \sqrt[n]{\int_0^1 |x_n(t)|^2 dt} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Man hat also eine Nullfolge bzgl. der Norm $\|.\|_2$.

Benutzt man in $C[0,1]$ die Norm $\|.\|_\infty$, so erkennt man unschwer, daß $\|x_n\|_\infty = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Beide Normen können also nicht äquivalent sein. **(Grenzwert ist normabhängig)**

Weiterhin sieht man unschwer

$$\|x_n - x_m\|_2 = \sqrt[2]{\int_0^1 |x_n(t)-x_m(t)|^2 dt} \overset{m,n\to\infty}{\to} 0.$$

Es handelt sich also um eine Cauchyfolge bzgl. der Norm $\|.\|_2$.
Ebenso erkennt man

$$x_n(t) \overset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} 1 & : \quad t=0 \\ 0 & : \quad t\in(0,1] \end{cases}$$

Offensichtlich gibt es keine stetige Grenzfunktion für diese Folge im Vektorraum $C[0,1]$, d.h. $(C[0,1], \|.\|_2)$ ist nicht vollständig, also kein Banachraum.
Wir werden später zeigen: $(C[0,1], \|.\|_\infty)$ ist ein Banachraum. Dieses Beispiel zeigt damit auch, daß die Eigenschaft eines Raumes *vollständig* zu sein also **nicht nur** von dem zu Grunde gelegten Vektorraum, **sondern auch** vom Abstandsbegriff, der in diesem Raum erklärt ist, abhängt.