

## Komplexe Funktionen

### für Studierende der Ingenieurwissenschaften

#### Blatt 5: Hausaufgaben

#### Aufgabe 1:

Gegeben sei ein hohler, sehr langer Kreiszyylinder vom Radius 1. Die obere und die untere Hälfte seien voneinander elektrisch isoliert. Die obere Hälfte befinde sich auf dem Potential  $\Phi = 100 \text{ V}$  und die untere Hälfte befinde sich auf dem Potential  $\Phi = -100 \text{ V}$ . Bei entsprechender Wahl des Koordinatensystems ergibt sich auf dem Schnitt des Zylinders mit der komplexen Zahlenebene:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= 100\text{V} && \text{für } |z| = |x + iy| = 1, y > 0, \\ \Phi(z) &= -100\text{V} && \text{für } |z| = |x + iy| = 1, y < 0.\end{aligned}$$

Berechnen Sie das Potential und die Feldstärke im Zylinder.

**Hinweise :** Transformieren Sie den Einheitskreis auf einen Sektor, zum Beispiel auf die rechte Halbebene. Bei vernünftiger Transformation hängen die Randdaten in der Modellebene nur vom Winkel ab. Verwenden Sie zur Lösung in der Differentialgleichung in der Modellebene die Potentialgleichung in Polarkoordinaten

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Psi + r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \Psi + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Psi = 0$$

unter Berücksichtigung der speziellen Struktur der Randdaten. Schreiben Sie die Lösung in der Modellebene um in kartesische Koordinaten und transformieren Sie zurück.

#### Aufgabe 2:

- a) Für  $z = x + iy$  sei  $\bar{z} = x - iy$ . Berechnen Sie

$$\oint_c \bar{z} \cdot z^{\frac{1}{2}} dz$$

längs der Kurven

$$c : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, c(t) = 4e^{it} \text{ und } C : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, C(t) = 4e^{-it}$$

und bestätigen Sie damit, dass das komplexe Kurvenintegral im Allgemeinen wegababhängig ist.

- b) Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale, falls diese existieren. Die Kurven sollen ein mal in positiver Richtung durchlaufen werden.

$$\begin{aligned}\text{i)} & \int_{C_1} \frac{1}{z-2} dz && C_1 : \text{Kreis mit Radius 1 um Null,} \\ \text{ii)} & \int_{C_2} \frac{1}{z-2} dz && C_2 : \text{Kreis mit Radius 2 um Null,} \\ \text{iii)} & \int_{C_3} \frac{1}{z-2} dz && C_3 : \text{Kreis mit Radius 3 um Null.}\end{aligned}$$

**Aufgabe 3:**

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f_1(z) := \frac{e^z - 1}{e^z + e^{-z}}, \quad f_2(z) := \frac{1}{\ln(3 - z)}, \quad f_3(z) := \frac{1}{\ln(\frac{i}{2} - 4 - z)}.$$

Bestimmen Sie für  $k = 1, 2, 3$  (ohne die jeweilige Reihe zu berechnen) den Radius des größten Kreises um Null, in dem die jeweilige Taylor Reihen  $T_k$  von  $f_k$  mit Entwicklungspunkt Null gegen  $f_k$  konvergiert.

b) Die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z(z^2 - 4z + 13)}$  soll in eine Taylor Reihe mit Entwicklungspunkt  $z_0 := x_0 + iy_0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^+$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$  entwickelt werden, die mindestens in der Kreisscheibe  $|z - z_0| < |z_0|$  gegen  $f(z)$  konvergiert. Wie muss der Entwicklungspunkt gewählt werden, damit  $x_0$  möglichst groß wird.

**Abgabe: 06. - 10.06.22**