

# Komplexe Funktionen

## für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 3: Präsenzaufgaben

#### Aufgabe 1:

$\ln(z)$  bezeichne den Hauptwert des komplexen Logarithmus. Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = \sqrt{2}(-1 + i), \quad z_2 = 3i, \quad z_3 = -4i.$$

a) Berechnen Sie die kartesischen Darstellungen von

$$z_4 := z_1 \cdot z_2, \quad z_5 := \frac{z_1}{z_2}, \quad z_6 := z_1 \cdot z_3, \quad z_7 := \frac{z_1}{z_3}.$$

b) Berechnen Sie  $\ln(z_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, 7$ .

c) Vergleichen Sie für  $k = 2, 3$

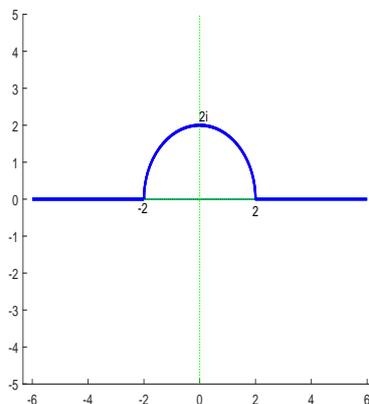
$$\ln(z_1 \cdot z_k) \text{ mit } \ln(z_1) + \ln(z_k) \\ \text{und} \\ \ln\left(\frac{z_1}{z_k}\right) \text{ mit } \ln(z_1) - \ln(z_k).$$

d) Für welche komplexen Zahlen gelten die aus  $\mathbb{R}$  bekannten Rechenregeln:

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b), \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)?$$

**Aufgabe 2:** Es seien

$$D_1 := \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq -2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : z = 2e^{i\phi}, \phi \in ]0, \pi[ \} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < \infty\},$$



und

$$D_2 := \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq -2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : z = 2e^{i\phi}, \phi \in ]\pi, 2\pi[ \} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < \infty\}.$$

Bestimmen Sie die Bilder von  $D_1$  und  $D_2$  unter der Abbildung  $f(z) = \frac{2}{z} + \frac{z}{2}$ .

Auf welche der Mengen  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_1 \cup D_2$  ist  $f$  umkehrbar?

### Aufgabe 3:

- a) (i) Wie viele Lösungen hat die Gleichung  $(z - 2i)^{10} = z^{10}$  ?  
(ii) Zeigen Sie, dass alle Lösungen der Gleichung aus i) auf der Geraden  $\operatorname{Im}(z) = 1$  liegen.
- b) Wie viele Lösungen hat die Gleichung  $(z - 2i)^i = z^i$  ?

**Bearbeitung:** 02-06.05.22