Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. I. Gasser

SoSe 2022

Klausur Komplexe Funktionen

06. September 2022

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. In die Wertung gehen maximal 20 Punkte ein.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

AIW	CS/CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	TM	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1) [5 Punkte]

a) Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\; f(z) := (\mathrm{Re}\,(z))^2 - (\mathrm{Im}\,(z))^2 + k \cdot \mathrm{Im}\,(z) + 2i \cdot \mathrm{Re}\,(z) \cdot [\mathrm{Im}\,(z) + 1]$$

in jedem Punkt aus $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar?

b) In welchen Punkte aus $\mathbb{C}$ ist die Funktion

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad g(z) := z \cdot e^z$$

winkeltreu?

Lösung zu 1:

a) Mit der üblichen Bezeichnung $z = x + iy$ gilt
$f(z) := \underbrace{x^2 - y^2 + k \cdot y}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{(2xy + 2x)}_{v(x,y)}$.
Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen lauten:
$u_x = 2x \overset{!}{=} v_y = 2x$ also $\boxed{k \in \mathbb{R} \text{ beliebig}}$
und
$-u_y = 2y - k \overset{!}{=} v_x = 2y + 2$ also $\boxed{k = -2}$.
Für $k = -2$ ist f auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar. **(3 Punkte)**

b) $g(z) := z \cdot e^z$
g ist auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar mit
$g'(z) = e^z + z \cdot e^z = (z+1)e^z$.
g ist überall winkeltreu wo $f'(z) \neq 0$ gilt, also für alle $z \neq -1$.
(2 Punkte)

Aufgabe 2) [7 Punkte]

a) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $\quad T(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit

$$T(i) = 0\,, \qquad T(\infty) = 2\,, \qquad T(-1) = \infty\,.$$

b) Welche verallgemeinerten Kreise aus $\mathbb{C}$ werden durch T auf Geraden abgebildet?

c) Bestimmen Sie die Bilder der folgenden verallgemeinerten Kreise unter der Transformation T aus Teil a).

$K :=$ reelle Achse,

$\tilde{K} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Lösung zu 2) [7 Punkte]

a) $$T(i) = 0\,, \qquad T(-1) = \infty\,. \iff \qquad T(z) = \frac{a(z-i)}{z+1}.$$

$$T(\infty) = 2\,, \qquad \Longrightarrow \qquad T(z) = \frac{2z-2i}{z+1}. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

b) Ein verallgemeinerter Kreis wird genau dann auf eine Gerade abgebildet, wenn der Punkt -1 auf ihm liegt. [**1 Punkt**]

c) $K = \mathbb{R}$ [**2 Punkte**]

Wegen $-1 \in \mathbb{R}$ ist das Bild der reellen Achse eine Gerade g_1.

Wegen $T(\infty) = 2$ liegt 2 auf g_1.

Wir bestimmen das Bild einer weiteren reellen Zahl, zum Beispiel

$T(0) = -2i$.

$T(\mathbb{R})$ ist also die Gerade durch 2 und $-2i$:

$T(\mathbb{R}) = g_1 = \{w = u + iv \in \mathbb{C} : v = u - 2\}$.

$\tilde{K} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1$. Einheitskreis. [**2 Punkte**]

Wegen $-1 \in \tilde{K}$ ist das Bild ders Einheitskreises eine Gerade g_2.

Wegen $T(i) = 0$ geht g_2 durch Null.

Da $\tilde{K}$ im Urbild symmetrisch zu $\mathbb{R}$ ist, ist g_2 senkrecht zu g_1, also

$g_2 = \{w = u + iv \in \mathbb{C} : v = -u\}$.

Alternativ, bestimmt man das Bild eines weiteren Punktes aus dem Einheitskreis, zum Beispiel $T(1) = 1 - i$ und kommt natürlich zum selben Ergebnis.

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Sei $\Gamma := \{z(t) = 2i + 5 \cdot e^{it} \,|\, t \in [0, 2\pi]\}$ der in mathematisch positiver Richtung durchlaufene Rand des Kreises mit Radius 5 um $2i$.

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale.

a) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2}{z-6}\,dz$.

b) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2}{(z-2i)(z+i)}\,dz$.

c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2}{(z+i)^2}\,dz$.

d) $\displaystyle\int_\Gamma \overline{(z-2i)}\,dz$,   wobei $\overline{z}$ die konjugiert komplexe Zahl zu z bezeichnet.

Lösung zu 3:

a) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2}{z-6}\,dz = 0$ (CIS) [**1 Punkt**]

b) Nach dem Residuensatz gilt:

$$\int_\Gamma \frac{z^2}{(z+i)(z-2i)}\,dz = 2\pi i\left(\left[\frac{z^2}{z-2i}\right]_{z=-i} + \left[\frac{z^2}{(z+i)}\right]_{z=2i}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-1}{-3i} + \frac{-4}{3i}\right) = 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right) = -2\pi\,. \text{ **(3 Punkte)**}$$

c) Nach der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen ist

$$\int_\Gamma \frac{z^2}{(z+i)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\left[(z^2)'\right]_{z=-i} = 2\pi i \cdot 2(-i) = 4\pi\,. \text{ **(2 Punkte)**}$$

d)

$$\int_\Gamma \overline{(z-2i)}\,dz = \int_0^{2\pi} \overline{2i + 5e^{it} - 2i} \cdot \dot\Gamma(t)dt = \int_0^{2\pi} \overline{5e^{it}} \cdot 5ie^{it}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 25i \cdot e^{-it} \cdot e^{it}dt = 2\pi \cdot 25i = 50\pi i. \text{ **(2 Punkte)**}$$