Fachbereich Mathematik **Wise 2021/22**
Prof. Dr. J. Struckmeier

Klausur Komplexe Funktionen

01. März 2022

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. In die Wertung gehen maximal 20 Punkte ein.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:	AIW	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	TM	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1) [3 Punkte]

Es sei i die imaginäre Einheit. Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$e^{2z+1+i\frac{\pi}{2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+i)\,.$$

Lösungsskizze zur Aufgabe 1) [3 Punkte]

$w := e^{2z+1+i\frac{\pi}{2}} \;=\; e^{2x+1} \cdot e^{i(2y+\frac{\pi}{2})}$. . [**Ansatz: 1 Punkt**]

$|w| = e^{2x+1} \overset{!}{=} \left|\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$
$\iff 2x+1 \;= \ln(1) \;= 0 \iff x = -\frac{1}{2}\,.$. [**1 Punkt**]

$e^{i(2y+\frac{\pi}{2})} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \arg\left(e^{i(2y+\frac{\pi}{2})}\right) = \arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2k\pi$
$\iff 2y + \frac{\pi}{2} \;=\; \frac{\pi}{4} \;+\; 2k\pi \iff 2y \;=\; -\frac{\pi}{4} \;+\; 2k\pi \iff y \;=\; -\frac{\pi}{8} \;+\; k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$. [**1 Punkt**]

Aufgabe 2) [3 + 4 Punkte]

Es sei i die imaginäre Einheit und $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Für welche $k, l \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\; f(z) := (x^3 + kxy^2) + i \cdot \left(lx^2y - y^3\right)$$

in jedem Punkt aus $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar?

b) Gegeben ist die Funktion

$$u(x+iy) = \operatorname{Re}\left(f(x+iy)\right) = 3\cos(4x)e^{4y}\,.$$

i) Zeigen Sie, dass die Funktion u harmonisch ist.

ii) Bestimmen Sie alle zu u konjugiert harmonischen Funktionen v, das heißt alle Funktionen v, für die $f = u + iv$ überall in $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.

Lösung zu 2:

a) Mit der üblichen Bezeichnung $z = x + iy$ gilt

$f(z) = \underbrace{(x^3 + kxy^2)}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{\left(lx^2y - y^3\right)}_{v(x,y)}$.

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen lauten:

$u_x = 3x^2 + ky^2 \stackrel{!}{=} v_y = lx^2 - 3y^2$ also $\boxed{-k = l = 3}$

und

$-u_y = -2kxy \stackrel{!}{=} v_x = 2lxy$ also $\boxed{k = -l}$.

Für $k = -3$ und $l = 3$ ist f auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

b) i) $u_{xx} = \left(-12\sin(4x)e^{4y}\right)_x = -48\cos(4x)e^{4y}$.

$u_{yy} = \left(+12\cos(4x)e^{4y}\right)_y = 48\cos(4x)e^{4y}$.

Also $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.

ii) $f(z) = u(z) + iv(z)$, $u(x+iy) = \operatorname{Re}\left(f(x+iy)\right) = 3\cos(4x)e^{4y}$.

$v_y = u_x = -12\sin(4x)e^{4y} \iff v(x,y) = -3\sin(4x)e^{4y} + c(x)\,,$

$-u_y = -12\cos(4x)e^{4y} \stackrel{!}{=} v_x = -12\cos(4x)e^{4y} + c'(x)$

$\iff c'(x) = 0 \implies v(x,y) = -3\sin(4x)e^{4y} + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}\,.$

Aufgabe 3: [10 Punkte] (Interner Kommentar: Übungsblatt 7)

Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(z) \;=\; \frac{z^2+6iz-5}{(z^2+1)\,(z^2+25)}\,.$$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

b) Berechnen Sie die Residuen in allen isolierten Singularitäten von f.

c) Geben Sie die komplexe Partialbruchzerlegung von

$$\tilde{f}(z) \;=\; \frac{1}{(z-i)(z-5i)}$$

an.

d) Berechnen Sie diejenige Laurent-Reihe von $\tilde{f}$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, die für $z^* = 4$ gegen $f(4)$ konvergiert.

Lösung:

a) **(4 Punkte)**

$$f(z) \;=\; \frac{z^2+6iz-5}{(z+i)\,(z-i)\;(z+5i)\,(z-5i)}\,.$$

Einsetzen der Nennernullstellen im Zähler:

$$\text{Zähler}\,(-i) \;=\; -1-6i^2-5=0$$

Weitere Nennernullstellen einsetzen oder

$$(z^2+6iz-5):(z+i)=z+5i$$

$$\Longrightarrow f(z) := \frac{(z+i)\,(z+5i)}{(z+i)\,(z-i)\;(z+5i)\,(z-5i)}\,.$$

Die Singularitäten sind also:

$z_1 = -i$: hebbar,

$z_2 = +i$: einfacher Pol,

$z_3 = -5i$: hebbar,

$z_4 = +5i$: einfacher Pol.

b) **(2 Punkte)**

$Resf(z_1) \;=\; Resf(z_3) \;=\; 0$

$Resf(z_2) = \left.\dfrac{1}{z-5i}\right|_{z=i} = \dfrac{1}{-4i} = \dfrac{i}{4}$

$Resf(z_4) = \left.\dfrac{1}{z-i}\right|_{z=5i} = \dfrac{1}{4i} = \dfrac{-i}{4}$.

c) **(1 Punkt)**

für alle $z \neq z_1, z_3$ gilt $\tilde{f}(z) = f(z)$. Daher gilt

$$\tilde{f}(z) = \frac{i}{4(z-i)} \;-\; \frac{i}{4(z-5i)} \,.$$

d) **(3 Punkte)**

Da die Singularitäten im Abstand von 1 bzw. 5 von z_0 liegen und die Reihe für $z = 4$ gegen $\tilde{f}(1)$ konvergieren soll, ist die Laurent–Reihe für $1 < |z| < 5$ gesucht.

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(z) &= \frac{i}{4z(1-\frac{i}{z})} \;-\; \frac{i}{4(-5i)(1-\frac{z}{5i})} \\
&= \frac{i}{4z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^k \;+\; \frac{1}{20}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{5i}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{k+1}}{4}\,z^{-k-1} \;+\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{20}\left(\frac{-iz}{5}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{k+1}}{4}\,z^{-k-1} \;+\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k i^k}{4\cdot 5^{k+1}}z^k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{i^{-k}}{4}\,z^k \;+\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k i^k}{4\cdot 5^{k+1}}z^k
\end{aligned}$$