Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Dr. K. Rothe ©

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 6

Laurent-Reihen

Sei f im Kreisring

$$K_{r,R}(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R \}$$

um den **Entwicklungspunkt** $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt

a) f ist auf $K_{r,R}(z_0)$ eindeutig in eine **Laurent-Reihe** entwickelbar, d.h.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k := \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}_{\text{Nebenteil}} .$$

b) Die Koeffizienten a_k sind eindeutig bestimmt und berechnen sich für $k \in \mathbb{Z}$ mit $r < \rho < R$ durch

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz .$$

Der Kreis $|z - z_0| = \rho$ wird dabei einmal positiv durchlaufen. Er kann ersetzt werden durch jede geschlossen C^1-Kurve im Kreisring, die z_0 einmal positiv umläuft.

c) **Hauptteil** und **Nebenteil** konvergieren in jedem abgeschlossenen Teilring $K_{\tilde{r},\tilde{R}}(z_0)$ mit $r < \tilde{r} \leq |z - z_0| \leq \tilde{R} < R$ absolut und gleichmäßig.

d) Ist f im Kreis $K_R(z_0)$ um z_0 holomorph, dann verschwinden die Koeffizienten des Hauptteils, d.h. es gilt $0 = a_{-1} = a_{-2} = a_{-3} = \cdots$ und die **Laurent-Reihe** stimmt mit der **Taylor-Reihe** überein.

e) Die **Konvergenzkarte** beispielsweise einer rationalen Funktion $f(z) = p(z)/q(z)$ mit teilerfremden Polynomen p und q und Nennernullstellen w_k mit $k \leq n$ zum Entwicklungspunkt z_0 setzt sich damit aus ineinander geschachtelten Kreisringen

$$(0 <) \quad |z - z_0| < R_1 < |z - z_0| < R_2 < |z - z_0| < \cdots < R_n < |z - z_0|$$

zusammen, mit $R_k = |w_k - z_0|$. Der innere Ring ist dabei ein echter Kreis $|z - z_0| < R_1$, falls z_0 keine Nennernullstelle ist, sonst ist es die punktierte Kreisscheibe $0 < |z - z_0| < R_1$. Die Laurent-Reihen je Kreisring werden in der Regel unterschiedlich sein.

Aufgabe 21:

Man bestimme die Laurententwicklung der folgenden Funktionen und gebe jeweils den Koeffizienten a_{-1} der Reihe an:

a) $f(z) = \dfrac{e^z - 1 - z - z^2/2}{z^2}$ im Punkt $z_0 = 0$,

b) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^5}$ im Punkt $z_0 = 0$,

c) $f(z) = z \sin\left(\dfrac{1}{z + \pi}\right)$ im Punkt $z_0 = -\pi$.

Lösung:

a) Einzige Singularität von f ist der Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Für $|z| > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^z - 1 - z - z^2/2}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right) \\ &= \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \frac{z^3}{5!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} \quad \Rightarrow \quad a_{-1} = 0 \end{aligned}$$

b) Einzige Singularität von f ist der Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Für $|z| > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\cos z}{z^5} = \frac{1}{z^5}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \cdots\right) \\ &= \left(\frac{1}{z^5} - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{z} - \frac{z}{6!} \pm \cdots\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n-5} \quad \Rightarrow \quad a_{-1} = \frac{1}{4!} \end{aligned}$$

c) Einzige Singularität von f ist der Entwicklungspunkt $z_0 = -\pi$. Für $|z+\pi| > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= z \sin\left(\frac{1}{z+\pi}\right) \\ &= (z + \pi - \pi)\left(\frac{1}{z+\pi} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(z+\pi)^3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{(z+\pi)^5} \mp \cdots\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(z+\pi)^2} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{(z+\pi)^4} \mp \cdots\right) \\ &\quad + \left(-\frac{\pi}{z+\pi} + \frac{\pi}{3!}\cdot\frac{1}{(z+\pi)^3} \mp \cdots\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z+\pi}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z+\pi}\right)^{2n+1} \\ &\Rightarrow \; a_{-1} = -\pi \end{aligned}$$

Singularitäten

Besitzt f in z_0 eine Definitionslücke, dann handelt es sich um eine **isolierte Singularität**, wenn eine punktierte Kreisscheibe $0 < |z - z_0| < r$ existiert, in der f holomorph ist.

Klassifikation isolierter Singularitäten

Isolierte Singularitäten z_0 werden anhand der Koeffizienten a_k des Hauptteils der Laurent-Reihe zum Entwicklungspunkt z_0 klassifiziert:

a) z_0 heißt **hebbar**, wenn die Laurent-Reihe keinen Hauptteil besitzt, d.h. wenn $0 = a_{-1} = a_{-2} = a_{-3} = \cdots$ gilt, also eine reine Taylor-Reihe vorliegt.

b) z_0 heißt **Pol der Ordnung** $m > 0$, wenn der Hauptteil der Laurent-Reihe nach m Summanden abbricht, d.h. $a_{-m} \neq 0$ und $0 = a_{-(m+1)} = a_{-(m+2)} = a_{-(m+3)} = \cdots$ gilt.

c) z_0 heißt **wesentliche Singularität**, wenn der Hauptteil der Laurent-Reihe unendlich viele Summanden besitzt, d.h. $a_{-k} \neq 0$ für unendlich viele $k > 0$ gilt.

Der Koeffizient a_{-1} der Laurent-Reihe von f in der punktierten Kreisscheibe $0 < |z - z_0| < r$ um z_0 wird als **Residuum** von f in z_0 bezeichnet:

$$\text{Res}\,(f; z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=\rho} f(z)\,dz\,.$$

Residuenberechnung

a) z_0 **Pol erster Ordnung**

$$\text{Res}\,(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot f(z)\,,$$

Speziell für $f(z) = g(z)/h(z)$ erhält man

$$\text{Res}\,(f; z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,.$$

(g, h holomorph und h besitzt in z_0 eine einfache Nullstelle.)

b) z_0 **Pol m-ter Ordnung**

$$\text{Res}\,(f; z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m \cdot f(z)\right]\,.$$

Aufgabe 22:

Für die folgenden Funktionen

a) $f(z) = \dfrac{1}{z^4 + z^2}$,

b) $f(z) = \sin \dfrac{1}{z}$,

c) $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^2}$,

d) $f(z) = \coth\, z$

bestimme man:

Lage und Art der (endlichen) Singularitäten, die zugehörigen Residuen und die ersten drei (nichtverschwindenden) Summanden der Laurentreihe um $z_0 = 0$, die für große z konvergiert.

Lösung:

a) Die Singularitäten von

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + z^2} = \frac{1}{z^2(z^2+1)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2+1}$$

sind gegeben durch die Nennernullstellen, die keine Zählernullstellen sind:

$z_1 = i$ und $z_2 = -i$ sind Pole 1. Ordnung und $z_3 = 0$ ist Pol 2. Ordnung.

$$\text{Res }(f; z_1) = \left.\frac{1}{(z^4+z^2)'}\right|_{z=i} = \left.\frac{1}{4z^3+2z}\right|_{z=i} = \frac{1}{4i^3+2i} = \frac{i}{2}$$

$$\text{Res }(f; z_2) = (z+i)\cdot\left.\frac{1}{z^4+z^2}\right|_{z=-i} = \left.\frac{1}{z^2(z-i)}\right|_{z=-i} = \frac{1}{(-i)^2(-2i)} = -\frac{i}{2}$$

$$\text{Res }(f; z_3) = \frac{1}{1!}\left.\left(z^2\left(\frac{1}{z^4+z^2}\right)\right)'\right|_{z=0} = \left.\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'\right|_{z=0} = -\left.\frac{2z}{(z^2+1)^2}\right|_{z=0} = 0$$

Die Laurent-Entwicklung im Außengebiet $|z| > 1$ ergibt sich durch:

$$f(z) = \frac{1}{z^4+z^2} = \frac{1}{z^4}\cdot\frac{1}{1+1/z^2} = \frac{1}{z^4}\left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4}\cdots\right) = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^8}\cdots$$

b) $f(z) = \sin\dfrac{1}{z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}_{=:a_n} \frac{1}{z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \cdots$

Die einzige Singularität $z_0 = 0$ ist wesentlich mit
Res $(f; z_0) = a_{-1} = 1$.

c) $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^2} = \dfrac{1}{z^2}\left(\dfrac{z^3}{3!} - \dfrac{z^5}{5!} + \dfrac{z^7}{7!} + \cdots\right) = \dfrac{z}{3!} - \dfrac{z^3}{5!} + \dfrac{z^5}{7!} + \cdots$

Die einzige Singularität $z_0 = 0$ ist hebbar mit
Res $(f; z_0) = a_{-1} = 0$.

d) Die Singularitäten von $f(z) = \coth z = \dfrac{\cosh z}{\sinh z}$ ergeben sich aus:

$$\begin{aligned} 0 &= \sinh z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x+iy} - e^{-x-iy}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^x(\cos y + i\sin y) - e^{-x}(\cos y - i\sin y)\right) \\ &= \cos y \sinh x + i \sin y \cosh x\,. \end{aligned}$$

Die Lösungen sind gegeben durch $y = k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$ und $x = 0$. Die Nennernullstellen $z_k = ik\pi$ sind einfach und auch keine Zählernullstellen, denn

$$(\sinh z)'|_{z=ik\pi} = \cosh ik\pi = \cos k\pi \neq 0\,.$$

Also sind z_k Pole 1. Ordnung und man erhält

$$\text{Res }(f; z_k) = \left.\left(\frac{\cosh z}{(\sinh z)'}\right)\right|_{z=z_k} = \left.\left(\frac{\cosh z}{\cosh z}\right)\right|_{z=z_k} = 1\,.$$

Es gibt kein Außengebiet ohne Singularitäten.

Komplexe Partialbruchzerlegung

Gegeben sei die rationale Funktion

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

mit Polynomen p und q und es gelte

a) Grad $p <$ Grad q und

b) r besitze die verschiedenen Polstellen $z_1, \cdots, z_m$. Dies sind die Nennernullstellen von q, die nach 'kürzen' mit denen von p übrig geblieben sind. p und q können damit als teilerfremd vorausgesetzt werden. Betrachtet wird also die in den isolierten hebbaren Singularitäten stetig ergänzte Funktion.

Dann besitzt r die **komplexe Partialbruchzerlegung**

$$r(z) = h(z; z_1) + \cdots + h(z; z_m)\,.$$

Dabei ist

$$h(z; z_k) = \sum_{j=1}^{n_k} a_{-j,k}(z - z_k)^{-j} = \frac{a_{-1,k}}{z - z_k} + \frac{a_{-2,k}}{(z - z_k)^2} + \cdots + \frac{a_{-n_k,k}}{(z - z_k)^{n_k}}$$

der Hauptteil der Laurent-Reihe von r zum Entwicklungspunkt z_k und n_k die Ordnung des Pols z_k.

Zur Berechnung der Koeffizienten $a_{-j,k} \in \mathbb{C}$ können die Koeffizienten der Taylor-Reihe der um z_k holomorphen Funktion $g(z) := (z - z_k)^{n_k} r(z)$ zum Entwicklungspunkt z_k verwendet werden:

$$r(z) = \frac{1}{(z - z_k)^{n_k}} \left(g(z_k) + \frac{g'(z_k)}{1!}(z - z_k) + \frac{g''(z_k)}{2!}(z - z_k)^2 + \cdots \right)\,.$$

Speziell für einen Pol 1-ter Ordnung in z_k erhält man:

$$h(z; z_k) = \frac{a_{-1,k}}{z - z_k} = \frac{\text{Res}\,(r; z_k)}{z - z_k} = \frac{g(z_k)}{z - z_k}\,.$$

Residuensatz

Die Funktion f sei im Gebiet G bis auf isolierte Singularitäten z_k holomorph. Für eine geschlossene Kurve c in G, die endlich viele verschiedene $z_1, \ldots, z_m$ einmal im mathematisch positiven Sinn umläuft und auf der selbst keine Singularitäten liegen gilt der **Residuensatz**

$$\oint_c f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\,(f; z_j)\,.$$

Bemerkung:

Umläuft c eine Singularität z_j mehrfach, so wird der zugehörige Summand der obigen Summe Res $(f; z_j)$ noch mit der **Umlaufzahl**, der Differenz der Anzahl positiver und negativer Umläufe, Uml $(c; z_j)$ multipliziert.

Aufgabe 23:

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{25}{z^4 - z^2 - 2z + 2}\,.$$

a) Man bestimme mit Hilfe von Laurent-Reihenentwicklungen die Partialbruchzerlegung von f.

b) Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint_c f(z)\,dz$$

für den Kreis $\quad c: \ |z+2| = 2.$

Lösung:

a) Aus der Faktorisierung

$$z^4 - z^2 - 2z + 2 = (z+1-i)(z+1+i)(z-1)^2$$

ergeben sich die Nennernullstellen, die keine Zählernullstellen sind

$$z_0 = -1+i\,, \quad z_1 = -1-i\,, \quad z_2 = 1\,.$$

Damit sind z_0 und z_1 Pole 1. Ordnung und z_2 ist Pol 2. Ordnung.

Der Hauptteil der Laurententwicklung in z_k , $k = 0, 1$ besitzt damit die Form

$$h(z, z_k) = \frac{a_{-1,k}}{z - z_k} , \quad \text{wobei} \quad a_{-1,k} = \text{Res}(f(z); z_k)$$

gilt. Für $z_0 = -1 + i$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\text{Res}(f(z); -1 + i) &= \left.\frac{25}{(z + 1 + i)(z - 1)^2}\right|_{z=-1+i} \\
&= \frac{25}{(-1 + i + 1 + i)(-1 + i - 1)^2} \\
&= \frac{25}{2i(3 - 4i)} = \frac{25(3 + 4i)}{2i \cdot 25} = \frac{4 - 3i}{2}
\end{aligned}$$

Zum gleichen Ergebnis führt die Taylor-Reihenentwicklung des holomorphen Anteils von f um $z_0 = -1 + i$:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z + 1 - i} \cdot \underbrace{\frac{25}{(z + 1 + i)(z - 1)^2}}_{= g_1(z), \text{(holom.)}} \\
&= \frac{1}{z + 1 - i}(g_1(-1 + i) + g_1'(-1 + i)(z + 1 - i) + \cdots)
\end{aligned}$$

mit $g_1(-1 + i) = \text{Res}(f(z); -1 + i) = \dfrac{4 - 3i}{2}$. Insgesamt erhält man also

$$f(z) = \underbrace{\frac{4 - 3i}{2(z + 1 - i)}}_{= h(z, -1+i)} + \underbrace{g_1'(-1 + i) + \cdots}_{\text{Nebenteil}}$$

Für $z_1 = -1 - i$ ergibt sich entsprechend

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z + 1 + i} \cdot \underbrace{\frac{25}{(z + 1 - i)(z - 1)^2}}_{= g_2(z), \text{(holom.)}} \\
&= \frac{1}{z + 1 + i}(g_2(-1 - i) + g_2'(-1 - i)(z + 1 + i) + \cdots)
\end{aligned}$$

mit $g_2(-1 - i) = \text{Res}(f(z); -1 - i) = \dfrac{4 + 3i}{2}$. Insgesamt erhält man also

$$f(z) = \underbrace{\frac{4 + 3i}{2(z + 1 + i)}}_{= h(z, -1-i)} + \underbrace{g_2'(-1 - i) + \cdots}_{\text{Nebenteil}}$$

Für den Pol 2. Ordnung $z_2 = 1$ erhält man den Hauptteil der Laurent-Reihe um z_2 über die Taylor-Reihenentwicklung des holomorphen Anteils g_3 von f:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z - 1)^2} \cdot \frac{25}{(z + 1 - i)(z + 1 + i)} = \frac{1}{(z - 1)^2} \cdot \underbrace{\frac{25}{z^2 + 2z + 2}}_{= g_3(z)} \\
&= \frac{1}{(z - 1)^2} \left(g_3(1) + g_3'(1)(z - 1) + \frac{1}{2} g_3''(1)(z - 1)^2 + \cdots \right)
\end{aligned}$$

Nach kurzer Rechnung erhält man

$$g_3(1) = 5\,, \quad g_3'(1) = -4 \;=\; \mathrm{Res}(f(z);1)$$

$$\Rightarrow \qquad f(z) = \underbrace{\frac{5}{(z-1)^2} - \frac{4}{z-1}}_{=\,h(z,1)} + \underbrace{g_3''(1)/2 + \cdots}_{\text{Nebenteil}}$$

Die komplexe Partialbruchzerlegung lautet deshalb:

$$f(z) = h(z,-1+i) + h(z,-1-i) + h(z,1)$$
$$= \frac{4-3i}{2(z+1-i)} + \frac{4+3i}{2(z+1+i)} + \frac{5}{(z-1)^2} - \frac{4}{z-1}\,.$$

Als reelle Partialbruchzerlegung ergibt sich:

$$f(z) = \frac{4z+7}{z^2+2z+2} + \frac{5}{(z-1)^2} - \frac{4}{z-1}\,.$$

b) Von den Singularitäten von f

$$z_0 = -1+i\,, \quad z_1 = -1-i\,, \quad z_2 = 1\,.$$

liegen nur z_0 und z_1 innerhalb von c.

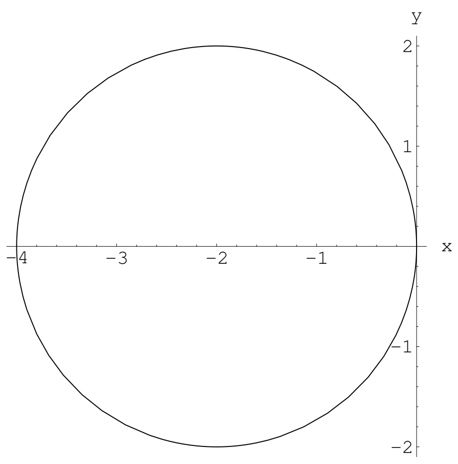

Bild 23: Kreis $c:\ |z+2| = 2$

Damit ergibt sich nach dem Residuensatz

$$\oint_c f(z)\,dz \;= 2\pi i\,(\mathrm{Res}\;(f;-1+i) + \mathrm{Res}\;(f;-1-i))$$
$$= 2\pi i \left(\frac{4-3i}{2} + \frac{4+3i}{2}\right) = 8\pi i\,.$$

Berechnung reeller Integral über den Residuensatzes

a) Es sei f im Gebiet G, das die obere Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im} z \geq 0\}$ umfasst, bis auf endlich viele isolierte und nicht reelle Singularitäten z_k holomorph und es gelte $\lim\limits_{|z|\to\infty} z \cdot f(z) = 0$ gleichmäßig in H, dann kann das folgende reelle uneigentliche Integral berechnet durch

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_k > 0} \mathrm{Res}\,(f; z_k)\,.$$

Insbesondere fallen rationale Funktionen $r(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ in diese Klasse, wenn für die Polynome Grad $p + 2 \leq$ Grad q gilt.

b) Es sei f im Gebiet G, das die obere Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im} z \geq 0\}$ umfasst, holomorph bis auf endlich viele isolierte und nicht reelle Singularitäten z_k in der oberen Halbebene und es gelte $\lim\limits_{|z|\to\infty, y\geq 0} f(z) = 0$, dann gilt

$$CHW \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_k > 0} \mathrm{Res}\,\left(f(z)e^{iz}; z_k\right)\,.$$

c) Für die Polynome p und q der rationalen Funktion $r(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ gelte Grad $p <$ Grad q. Außerdem habe r keine Polstellen z_k im Bereich $0 \leq x < \infty$, dann kann das folgende reelle uneigentliche Integral mit $0 < \alpha < 1$ berechnet durch

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{r(x)}{x^\alpha}\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi\alpha i}} \sum_{z_k \neq 0} \mathrm{Res}\,\left(\frac{r(z)}{z^\alpha}; z_k\right)\,.$$

Man wähle in der Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$ für die Auswertung von z^α den Zweig $0 < \varphi < 2\pi$.

d) Ein Integral vom Typ $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi$ mit einer rationalen Funktion R lässt sich als (geschlossenes) Kurvenintegral über den Einheitskreis deuten:

Parametrisierung des Einheitskreises c: $\quad c(\varphi) = e^{i\varphi}\,, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Auf dem Einheitskreis, also für $z = c(\varphi)$, gilt:

$$c'(\varphi) = iz\,, \quad \bar{z} = \frac{1}{z}\,, \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\,, \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\,.$$

Besitzt R keine Polstellen auf dem Einheitskreis, dann gilt nach dem Residuensatz

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi &= \int_c \underbrace{R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{iz}}_{=r(z)}\, dz \\
&= 2\pi i \sum_{|z_k|<1} \text{Res}\ (r; z_k)\ ,
\end{aligned}$$

dabei sind z_k die Polstellen der rationalen Funktion $r(z)$.

Aufgabe 24:

Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls die Integrale

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-4x+6}\, dx,$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+324}\, dx$ und

c) $\displaystyle\int_{-2}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+3x-4)\sqrt{x+2}}\, dx\ ,$

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{4+\cos\varphi}\, d\varphi\ .$

Lösung:

a) Die Singularitäten der Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z^2-4z+6}$ liegen bei $z_1 = 2+i\sqrt{2}$ und $z_2 = 2-i\sqrt{2}$, sind Pole 1. Ordnung, und man erhält:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-4x+6}\, dx &= 2\pi i\ \text{Res}(f; z_1) = 2\pi i \left.\frac{1}{z-2+i\sqrt{2}}\right|_{z=z_1} \\
&= 2\pi i \frac{1}{2i\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\ .
\end{aligned}$$

b) Beachtet man, dass $g(x) = \dfrac{\sin x}{x^4+324}$ eine ungerade Funktion ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+324}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+324}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^4+324}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{ix}}{x^4+324}}_{=f(x)}\,dx \;=\; 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\ z_k>0} \mathrm{Res}\ (f(z); z_k)\,.\end{aligned}$$

Die Singularitäten der Funktion $f(z)$ ergeben sich aus $z^4+324=0$ und lauten daher

$$z_0 = 3+3i\,,\quad z_1 = -3+3i\,,\quad z_2 = -3-3i\,,\quad z_3 = 3-3i\,.$$

Es sind Pole 1. Ordnung, wovon nur $z_{0,1}$ in der oberen Halbebene liegen mit den Residuen

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\ (f; z_0) &= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \frac{e^{iz_0}}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)} \\ &= \frac{e^{i(3+3i)}}{6(6+6i)6i} = -\frac{e^{-3+3i}}{216(1-i)} = -\frac{e^{-3}}{432}\cdot e^{3i}(1+i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\ (f; z_1) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) = \frac{e^{iz_1}}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)(z_1-z_3)} \\ &= \frac{e^{i(-3+3i)}}{-6\cdot 6i(-6+6i)} = \frac{e^{-3-3i}}{216(1+i)} = \frac{e^{-3}}{432}\cdot e^{-3i}(1-i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+324}\,dx &= 2\pi i\,(\ \mathrm{Res}\ (f; z_0) +\ \mathrm{Res}\ (f; z_1)) \\ &= 2\pi i\left(-\frac{e^{-3}}{432}\cdot e^{3i}(1+i) + \frac{e^{-3}}{432}\cdot e^{-3i}(1-i)\right) \\ &= \frac{e^{-3}\pi i}{216}\left(-(e^{3i}-e^{-3i}) - i(e^{3i}+e^{-3i})\right) \\ &= \frac{e^{-3}\pi i}{216}\left(-2i(\sin 3+\cos 3)\right) = \frac{e^{-3}\pi}{108}\left(\sin 3+\cos 3\right)\,.\end{aligned}$$

c) Die hebbare Singularität bei $x=1$ wird gekürzt und dann wird durch $y=x+2$ substituiert:

$$\int_{-2}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+3x-4)\sqrt{x+2}}\,dx = \int_{-2}^{\infty} \frac{1}{(x+4)\sqrt{x+2}}\,dx = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(y+2)\sqrt{y}}\,dy\,.$$

Nun besitzt der Integrand die Standardform $\dfrac{r(y)}{y^\alpha} = \dfrac{1}{(y+2)\sqrt{y}}$ mit $r(y) = \dfrac{1}{y+2}$ und $\alpha = 1/2$. $r(z)$ besitzt nur die Singularität $z_1=-2$ und man erhält:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(y+2)\sqrt{y}}\,dx = \frac{2\pi i}{1-e^{-\pi i}}\ \mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z+2)\sqrt{z}}; z_1\right) = \frac{2\pi i}{1-e^{-\pi i}}\cdot\frac{1}{\sqrt{-2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

d) Mit $z = e^{i\varphi}$ substituiere man

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \text{ bzw. } \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Die Substitution erfordert noch die Berechnung von:

$$\frac{dz}{d\varphi} = ie^{i\varphi} = iz \;\Rightarrow\; d\varphi = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{4+\cos\varphi}\, d\varphi \;=\; \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}{4+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{iz} \;=\; -\int_{|z|=1} \underbrace{\frac{z^2-1}{z(z^2+8z+1)}}_{=f(z)}\, dz$$

Die Singularitäten von f ergeben sich aus $0 = z(z^2+8z+1)$. Man erhält

$$z_0 = 0\,, \quad z_1 = -4+\sqrt{15}\,, \quad z_2 = -4-\sqrt{15}\,.$$

Nur von den im Einheitskreis liegenden $z_{0,1}$ werden die Residuen benötigt.

$$\text{Res}\,(f;z_0) \;=\; \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \;=\; \frac{z_0^2-1}{z_0^2+8z_0+1} = -1$$

$$\begin{aligned}\text{Res}\,(f;z_1) \;&=\; \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) \;=\; \frac{z_1^2-1}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)}\\ &=\; \frac{16-8\sqrt{15}+15-1}{(-4+\sqrt{15})2\sqrt{15}} \;=\; \frac{15-4\sqrt{15}}{\sqrt{15}(-4+\sqrt{15})} = 1\end{aligned}$$

Aus dem Residuensatz erhält man damit

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{4+\cos\varphi}\, d\varphi \;&=\; -2\pi i\,(\text{ Res}\,(f;z_0) + \text{ Res}\,(f;z_1))\\ &=\; -2\pi i\,(-1+1) \;=\; 0\,.\end{aligned}$$

Das Ergebnis überrascht nicht, da $\dfrac{\sin\varphi}{4+\cos\varphi}$ eine 2π-periodische ungerade Funktion ist.