Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Armin Iske
Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Sommersemester 2016

Literaturquellen.

- P. Henrici, R. Jeltsch: Komplexe Analysis für Ingenieure, Band 1, Birkhäuser Verlag, 1998.
- P. Henrici, R. Jeltsch: Komplexe Analysis für Ingenieure, Band 2, Birkhäuser Verlag, 1998.
- R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure 2, 3. Auflage. WILEY-VCH, Berlin, 2000.

Inhalte Komplexe Funktionen.

Funktionentheorie bzw. Komplexe Analysis:

- Funktionen einer komplexen Variablen
- Möbius-Transformationen
- Komplexe Differentiation und Integration
- Ebene Potentialprobleme
- Konforme Abbildungen
- Cauchysche Integralformel und Anwendungen
- Taylor- und Laurent-Reihenentwicklungen
- Isolierte Singularitäten und Residuen
- Integraltransformationen: Fourier- und Laplace-Transformation
- Shannon-Abtasttheorem

1 Komplexe Zahlen

Ausgangspunkt: Wir wollen alle Gleichungen der Form

$$x^2 = a \qquad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

lösen können.

Gute Nachricht:
Für nichtnegative $a \in [0, \infty)$ gibt es stets (mindestens) ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$.

Schlechte Nachricht: Für negative $a \in (-\infty, 0)$ gibt es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$.

Beispiel: Für $a = -1$ gibt es keine reelle Zahl x mit

$$x^2 + 1 = 0.$$

Was nun? Um alle Gleichungen der Form $x^2 = a$ lösen zu können, müssen wir den Zahlbereich der reellen Zahlen erweitern. Diese `Zahlbereichserweiterung` führt uns zum `Körper der komplexen Zahlen`, $\mathbb{C}$.

Im folgenden wird die (algebraische und geometrische) Struktur von $\mathbb{C}$ diskutiert.

Erste Ideen zur Einführung der komplexen Zahlen.

Startpunkt: Verwende *symbolische Lösung* i für Gleichung $x^2 + 1 = 0$, so dass

$$i^2 = -1.$$

Die Zahl i heißt imaginäre Einheit.

Nächster Schritt: Mit der imaginären Einheit bildet man nun die Zahlenmenge

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dann führt man die folgenden Rechenoperationen auf $\mathbb{C}$ ein.

- **Addition:**

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \qquad \text{für } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

- **Multiplikation:**

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \qquad \text{für } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Damit besitzt $\mathbb{C}$ eine algebraische Struktur.

Prinzipielle Fragen zu den komplexen Zahlen.

- Was ist eigentlich $\imath$?
- Kann man mit den obigen Rechenoperationen widerspruchsfrei rechnen?
- Sind die Rechenoperationen konsistent mit den bekannten Rechenregeln in $\mathbb{R}$?
- Kann man die komplexen Zahlen anordnen?
- Gibt es alternative Darstellungen für komplexe Zahlen?
- Sind mit Rechenoperationen in $\mathbb{C}$ geometrische Interpretationen verbunden?
- ...
- Warum beschäftigen wir uns eigentlich mit komplexen Zahlen?
- ... und später mit komplexen Funktionen?
- Gibt es hierzu interessante Anwendungen in den Ingenieurwissenschaften?

Erinnerung: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden zusammen mit der Addition und der Multiplikation einen Körper. Es gelten folgende Körperaxiome.

- Axiome der Addition.

Assoziativgesetz	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$	$x + (y + z)$	$=$	$(x + y) + z$
Kommutativgesetz	$\forall x, y \in \mathbb{R}:$	$x + y$	$=$	$y + x$
Existenz der Null	$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, 0 \in \mathbb{R}:$	$x + 0$	$=$	x
Existenz des Inversen	$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists -x \in \mathbb{R}:$	$x + (-x)$	$=$	0

- Axiome der Multiplikation.

Assoziativgesetz	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$	$(xy)z$	$=$	$x(yz)$
Kommutativgesetz	$\forall x, y \in \mathbb{R}:$	xy	$=$	yx
Existenz der Eins	$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, 1 \in \mathbb{R}:$	$x \cdot 1$	$=$	x
Existenz des Inversen	$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists x^{-1} \in \mathbb{R}:$	xx^{-1}	$=$	$1.$

- Distributivgesetz $x(y + z) = xy + xz$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Zur Konstruktion der komplexen Zahlen.

Ausgangspunkt: Betrachte die Menge $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$ mit **Addition**

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \qquad \text{für } (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$$

und **Multiplikation**

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \qquad \text{für } (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Beobachtung: Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ; weiterhin gilt

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b) \qquad \text{für } (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

d.h. $(1, 0) \in \mathbb{C}$ ist `neutrales Element der Multiplikation`. Die Gleichung

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0) \qquad \text{für } (a, b) \neq (0, 0)$$

besitzt die eindeutige Lösung, das `multiplikative Inverse` zu (a, b),

$$(x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Zur Struktur der komplexen Zahlen.

Bemerkung: Die Menge $\mathbb{R}^2$ bildet mit der Addition und Multiplikation einen Körper, den `Körper der komplexen Zahlen`, ab sofort bezeichnet mit $\mathbb{C}$.

Übung:

Weise Axiome der Addition und Multiplikation sowie Distributivgesetz nach. $\square$

Beobachtung: Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definiert durch $\varphi(a) = (a, 0)$ ist injektiv. Für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(a_1 + a_2) &= (a_1 + a_2, 0) = (a_1, 0) + (a_2, 0) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) \\ \varphi(a_1 a_2) &= (a_1 a_2, 0) = (a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) \end{aligned}$$

Fazit:

- Können die reellen Zahlen mit komplexen Zahlen der Form $(a, 0)$ identifizieren;
- Die reellen Zahlen bilden einen `Unterkörper` von $\mathbb{C}$;
- Die Rechenregeln in $\mathbb{C}$ sind konsistent mit den Rechenregeln in $\mathbb{R}$.

Der Körper der reellen Zahlen ist angeordnet.

Bemerkung: Die reellen Zahlen bilden einen `angeordneten Körper`; es gelten die folgenden `Anordnungsaxiome`.

- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt entweder $x > 0$ oder $x = 0$ oder $x < 0$;
- Für $x > 0$ und $y > 0$ gilt $x + y > 0$;
- Für $x > 0$ und $y > 0$ gilt $xy > 0$.

Frage: Ist der Körper der komplexen Zahlen, $\mathbb{C}$, angeordnet?

Antwort: NEIN!

Denn in einem angeordneten Körper sind von Null verschiedene Quadratzahlen positiv. Wäre $\mathbb{C}$ angeordnet, so folgt aus

$$0 < 1^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad 0 < i^2 = -1$$

der Widerspruch $0 < 1 + (-1) = 0$. ■

Zur einfacheren Notation der komplexen Zahlen.

Vereinfachung der Notationen:

- Für $a \in \mathbb{R}$ schreiben wir a statt $(a, 0)$;
- Die komplexe Einheit $(0, 1)$ notieren wir mit i;
- Damit lässt sich jede komplexe Zahl (a, b) schreiben als

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + b \cdot i = a + ib.$$

und es gilt

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Fazit: Wir haben mit $\mathbb{C}$ einen Körper konstruiert, der $\mathbb{R}$ umfasst. Die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

ist in $\mathbb{C}$ lösbar. Die einzigen beiden Lösungen lauten $\pm i$.

Realteil und Imaginärteil.

Ab sofort bezeichnen wir komplexe Zahlen mit z oder w. Für

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{R}$$

heißt x der Realteil und y der Imaginärteil von z, kurz

$$x = \mathrm{Re}(z) \qquad \text{und} \qquad y = \mathrm{Im}(z)$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z+w) &= \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w) && \text{für } z, w \in \mathbb{C} \\
\mathrm{Im}(z+w) &= \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w) && \text{für } z, w \in \mathbb{C} \\
\mathrm{Re}(az) &= a\mathrm{Re}(z) && \text{für } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R} \\
\mathrm{Im}(az) &= a\mathrm{Im}(z) && \text{für } z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

und weiterhin

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \text{für } z \neq 0.$$

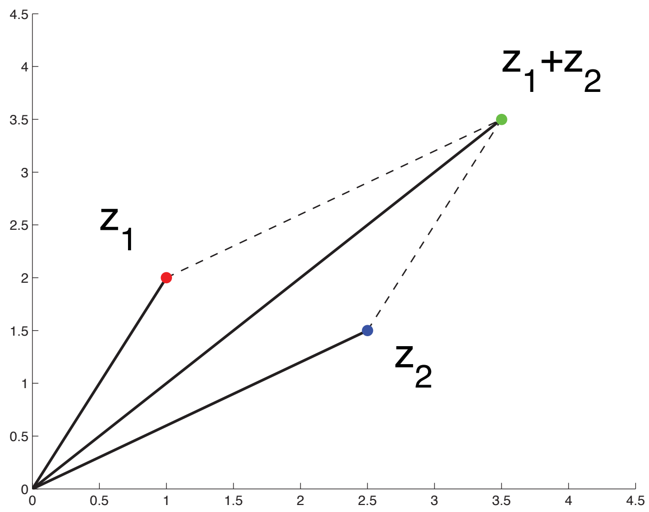
Die komplexe Zahlenebene.

Geometrische Veranschaulichung: Wir stellen $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ als Punkt in der

komplexen Zahlenebene (Gaußsche Zahlenebene)

dar, gegeben durch das kartesische Koordinatensystem des $\mathbb{R}^2$, mit einer reellen Achse, $\mathbb{R}$, und einer imaginären Achse, $i \cdot \mathbb{R}$.

Geometrische Veranschaulichung der Addition:
Durch übliche Addition der Ortsvektoren nach der Parallelogrammregel.



Addition zweier komplexer Zahlen.

Konjugation komplexer Zahlen.

Ordne durch Spiegelung an reeller Achse jeder komplexen Zahl $z = x + iy$ mit

$$\bar{z} := x - iy \in \mathbb{C}$$

konjugierte komplexe Zahl zu.

Es gelten die folgenden Rechenregeln.

$$\begin{array}{rcll}
\overline{w+z} & = & \bar{w} + \bar{z} & \text{für } w, z \in \mathbb{C} \\
\overline{wz} & = & \bar{w} \cdot \bar{z} & \text{für } w, z \in \mathbb{C} \\
\overline{(\bar{z})} & = & z & \text{für } z \in \mathbb{C} \\
z\bar{z} & = & x^2 + y^2 & \text{für } z = x + iy \in \mathbb{C} \\
\mathrm{Re}(z) & = & (z + \bar{z})/2 & \text{für } z \in \mathbb{C} \\
\mathrm{Im}(z) & = & (z - \bar{z})/(2i) & \text{für } z \in \mathbb{C}
\end{array}$$

Insbesondere gilt $z = \bar{z}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$.

Die Betragsfunktion.

Setze

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{für } z = x + iy \in \mathbb{C}$$

für den Betrag von z sowie $|w - z|$ für den Abstand zweier Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene.

- Somit stellt $|z| = |z - 0|$ den euklidischen Abstand von z zum Ursprung dar.
- Für $z \in \mathbb{R}$ stimmt $|z|$ mit dem (üblichen) Betrag für reelle Zahlen überein.
- Es gelten die folgenden Abschätzungen.

$$-|z| \le \mathrm{Re}(z) \le |z| \qquad \text{und} \qquad -|z| \le \mathrm{Im}(z) \le |z| \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Satz: Die Betragsfunktion liefert eine Norm auf $\mathbb{C}$, denn es gelten die Relationen

- $|z| \ge 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$;
- $|w + z| \le |w| + |z|$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$ (Dreiecksungleichung);
- $|wz| = |w| \cdot |z|$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$.

Die Eulersche Formel.

In der komplexen Zahlenebene gilt für

$$z = x + iy$$

mit den Polarkoordinaten

$$(x, y) = |z|(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

die Eulersche Formel

$$z = |z| \exp(i\varphi) = |z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)),$$

wobei $\varphi \in (-\pi, \pi]$ für $z \neq 0$ den (eindeutigen) Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Strahl von 0 durch $z = (x, y)$ darstellt.

Der Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ wird ebenso als Argument von $z \neq 0$ bezeichnet, kurz

$$\varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi].$$

Beispiel: $i = (0, 1) = \exp(i\pi/2)$, $-1 = i^2 = \exp(i\pi)$, somit gilt $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$.

Zur Geometrie der Multiplikation und Division.

Mit der Verwendung von Polarkoordinaten lässt sich die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ als Drehstreckung in der komplexen Zahlenebene interpretieren, denn für

$$w = |w|(\cos(\psi), \sin(\psi)) \qquad \text{und} \qquad z = |z|(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

gilt

$$\begin{aligned} wz &= |w| \cdot |z|(\cos(\psi) + \mathrm{i}\sin(\psi))(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)) \\ &= |w| \cdot |z|(\cos(\psi + \varphi) + \mathrm{i}\sin(\psi + \varphi)) = |w| \cdot |z| \exp(\mathrm{i}(\psi + \varphi)) \end{aligned}$$

bzw. mit der Eulerschen Formel

$$wz = |w| \cdot |z| \exp(\mathrm{i}\psi) \cdot \exp(\mathrm{i}\varphi) = |w| \cdot |z| \exp(\mathrm{i}(\psi + \varphi)).$$

Für die Division zweier komplexer Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ gilt analog

$$\frac{w}{z} = \frac{|w|}{|z|} \exp(\mathrm{i}(\psi - \varphi)) = \frac{|w|}{|z|}(\cos(\psi - \varphi) + \mathrm{i}\sin(\psi - \varphi)).$$

Potenzen und Einheitswurzeln.

Für die n-te Potenz z^n, $n \in \mathbb{N}$, von $z \in \mathbb{C}$ gilt die Darstellung

$$z^n = (|z| \exp(i\varphi))^n = |z|^n \exp(in\varphi) = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Die Gleichung

$$z^n = 1$$

besitzt die n paarweise verschiedenen Lösungen

$$z_k = \exp\left(i \frac{2\pi k}{n}\right) \qquad \text{für } k = 0, \ldots, n-1.$$

Diese Lösungen werden als n-te Einheitswurzeln bezeichnet.