Komplexe Funktionen

09. 07. 2018

J. Behrens

① Fourier-Transformation für die Wärmeleitungsgleichung:

- Betrachte: Wärmeleitung in unendlich langem Stab

$$u_t(x,t) = c\, u_{xx}(x,t) \qquad -\infty < x < \infty$$
$$u(x,0) = u_0(x) \qquad 0 \le t$$

- Fourier-Transformation bezüglich x:

$$U_t(\omega,t) = c\,(i\omega)^2\, U(\omega,t) \qquad U = \mathcal{F}[u]$$
$$U(\omega,0) = U_0(\omega)$$

Fourier-Transformierte von $u(\cdot,t)$

- Lösung der obigen linearen gew. DGL:

$$U(\omega,t) = U_0(\omega)\, e^{-c\omega^2 t}$$

- Rücktransformation, dazu zunächst Rücktransformation $e^{-c\omega^2 t}$:

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-c\omega^2 t}](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ct\omega^2} e^{i\omega x}\, d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left([\sqrt{ct}\,\omega]^2 - \frac{ix}{\sqrt{ct}}[\sqrt{ct}\,\omega] - \frac{x^2}{4ct}\right)} e^{-\frac{x^2}{4ct}}\, d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4ct}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left([\sqrt{ct}\,\omega] - \frac{ix}{2\sqrt{ct}}\right)^2} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi c t}} e^{-\frac{x^2}{4ct}}$$

(Formelsammlung)
(cos/sin ...)

- Anwendung des Faltungssatzes:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi c t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4ct}} u_0(\xi)\, d\xi$$

- <u>Bem:</u> $\frac{1}{\sqrt{4\pi c t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4ct}}$ ist die Greensche Funktion.