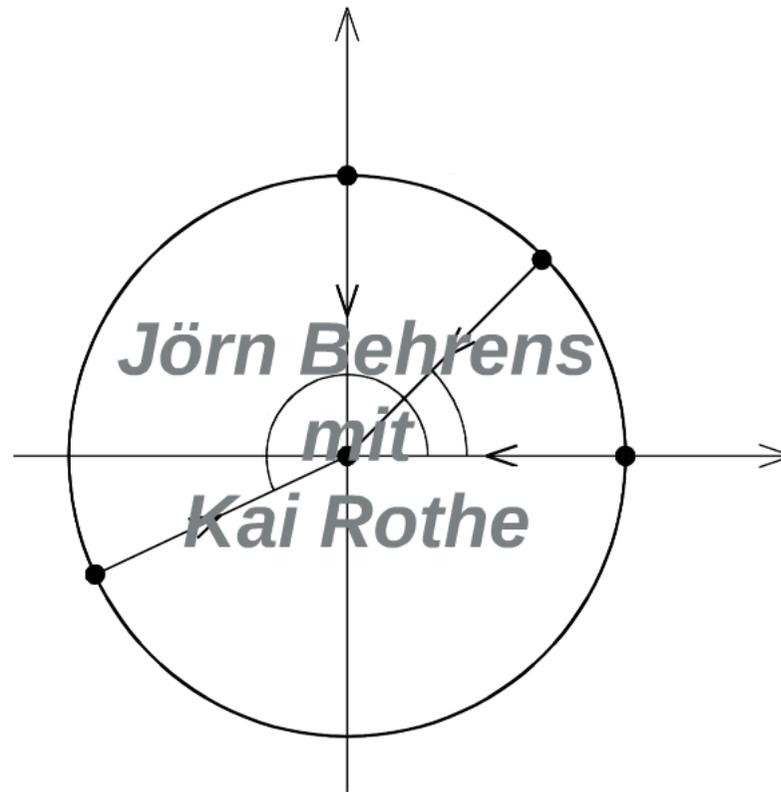


# Komplexe Funktionen

Sommer 2018



Singularitäten

# Erinnerung

## Satz: (Taylor-Reihe)

Sei  $f$  analytisch in  $G$  und sei  $a \in G$ . Dann konvergiert die **Taylor-Reihe**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

gegen  $f(z)$  für alle  $z$  innerhalb des größten Kreises um  $a$ , dessen inneres ganz in  $G$  enthalten ist ( $z \in B_r(a) \subset G$ ).

## Satz: (Eindeutigkeit der Taylor-Reihe)

Sei  $f$  analytisch in  $G$  und sei  $a \in G$ . In einer Umgebung von  $a$  gelte für  $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

mit komplexen Konstanten  $c_n \in \mathbb{C}$  für  $n = 1, 2, \dots$ . Dann gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

d.h. die obige Reihe ist die Taylor-Reihe von  $f$  um  $a$ .

## Satz: (Laurent-Reihenentwicklung)

Sei  $f$  analytisch im Kreisring  $R = R_{r_1}^{r_2}(a)$  und sei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

wobei  $\Gamma \subset R$  eine beliebige Kurve ist, die  $B_{r_1}(a)$  einmal im positiven Sinne umläuft. Dann gilt die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \forall z \in R.$$

## Definition: (Laurent-Reihe)

Die eben definierte Reihe heißt **Laurent-Reihe** von  $f$  in  $R$ . Weiterhin heißt  $a$  das **Entwicklungszentrum** der Laurent-Reihe.

## Satz (Eindeutigkeitsatz):

Eine in einem Kreisring  $R = R_{r_1}^{r_2}(a)$ ,  $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ , analytische Funktion  $f$  kann nur auf eine Weise in  $R$  durch eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

dargestellt werden, nämlich durch ihre Laurent-Reihe, wobei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

mit einem Weg  $\Gamma$ , der  $B_{r_1}(a)$  einmal im positiven Sinn umläuft.

**Satz:** (Taylor-Reihe)

Sei  $f$  analytisch in  $G$  und sei  $a \in G$ . Dann konvergiert die **Taylor-Reihe**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$$

gegen  $f(z)$  für alle  $z$  innerhalb des größten Kreises um  $a$ , dessen inneres ganz in  $G$  enthalten ist ( $z \in B_r(a) \subset G$ ).

**Satz:** (Eindeutigkeit der Taylor-Reihe)

Sei  $f$  analytisch in  $G$  und sei  $a \in G$ . In einer Umgebung von  $a$  gelte für  $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

mit komplexen Konstanten  $c_n \in \mathbb{C}$  für  $n = 1, 2, \dots$ . Dann gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

d.h. die obige Reihe *ist* die Taylor-Reihe von  $f$  um  $a$ .

**Satz:** (Laurent-Reihenentwicklung)

Sei  $f$  analytisch im Kreisring  $R = R_{r_1}^{r_2}(a)$  und sei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

wobei  $\Gamma \subset R$  eine beliebige Kurve ist, die  $B_{r_1}(a)$  einmal im positiven Sinne umläuft. Dann gilt die Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \forall z \in R.$$

**Definition:** (Laurent-Reihe)

Die eben definierte Reihe heißt **Laurent-Reihe** von  $f$  in  $R$ .

Weiterhin heißt  $a$  das **Entwicklungszentrum** der Laurent-Reihe.

**Satz (Eindeutigkeitssatz):**

Eine in einem Kreisring  $R \equiv R_{r_1}^{r_2}(a)$ ,  $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ , analytische Funktion  $f$  kann nur auf eine Weise in  $R$  durch eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

dargestellt werden, nämlich durch ihre Laurent-Reihe, wobei

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

mit einem Weg  $\Gamma$ , der  $\overline{B_{r_1}(a)}$  einmal im positiven Sinn umläuft.



# Isolierte Singularität

## Definition: (isolierte Singularität)

Sei eine analytische Funktion  $f$  definiert in einem Kreisring

$$B_r(a) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\},$$

wobei  $r > 0$  und  $a \in \mathbb{C}$ . Dann heißt  $a$  **isolierte Singularität**.

### Beispiele:

- $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  besitzt in  $z = 0$  eine isolierte Singularität.
- $f(z) = \frac{1}{1-z}$  besitzt in  $z = 1$  eine isolierte Singularität.
- $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z-1}\right)$  besitzt in  $z = 1$  eine isolierte Singularität.

### Beispiel:

- Der komplexe Logarithmus  $\text{Log}(z)$  ist in  $\{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$  nicht definiert. Daher ist  $z = 0$  **keine** isolierte Singularität!

### Erinnerung:

- Sei  $f$  analytisch in  $B_r(a) \setminus \{a\}$  mit isolierter Singularität in  $a$ .
- $f$  kann in  $B_r(a) \setminus \{a\}$  in eine Laurent-Reihe entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n.$$

**Definition:**  $f$  besitze in  $a \in \mathbb{C}$  eine isolierte Singularität. Dann heißt  $a$

- eine **hebbare Singularität** von  $f$ , falls in der Laurent-Reihe alle Koeffizienten  $c_n$  mit  $n < 0$  verschwinden;
- ein **Pol der Ordnung  $m$**  von  $f$ , falls in der Laurent-Reihe nur endlich viele Koeffizienten  $c_n$  mit  $n < 0$  von Null verschieden sind und  $-m$  die kleinste Zahl ist mit  $c_{-m} \neq 0$ ;
- eine **wesentliche Singularität** von  $f$ , falls in der Laurent-Reihe unendlich viele Koeffizienten  $c_n$  mit  $n < 0$  von Null verschieden sind. ❶

## **Definition:** (isolierte Singularität)

Sei eine analytische Funktion  $f$  definiert in einem Kreisring

$$B_r(a) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\},$$

wobei  $r > 0$  und  $a \in \mathbb{C}$ . Dann heißt  $a$  **isolierte Singularität**.

### **Beispiele:**

- $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$  besitzt in  $z = 0$  eine isolierte Singularität.

## Beispiele:

- $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$  besitzt in  $z = 0$  eine isolierte Singularität.
- $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  besitzt in  $z = \pm i$  isolierte Singularitäten.
- $f(z) = \exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$  besitzt in  $z = 1$  eine isolierte Singularität.

## Beispiel:

- Der komplexe Logarithmus  $\text{Log}(z)$  ist in  $\{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$  nicht definiert. Daher ist  $z = 0$  **keine** isolierte Singularität!

## Erinnerung:

- Sei  $f$  analytisch in  $B_r(a) \setminus \{a\}$  mit isolierter Singularität in  $a$ .
- $f$  kann in  $B_r(a) \setminus \{a\}$  in eine Laurent-Reihe entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n.$$

**Definition:**  $f$  besitze in  $a \in \mathbb{C}$  eine isolierte Singularität. Dann heißt  $a$

- eine **hebbare Singularität** von  $f$ , falls in der Laurent-Reihe alle Koeffizienten  $c_n$  mit  $n < 0$  verschwinden;
- ein **Pol der Ordnung  $m$**  von  $f$ , falls in der Laurent-Reihe nur endlich viele Koeffizienten  $c_n$  mit  $n < 0$  von Null verschieden sind und  $-m$  die kleinste Zahl ist mit  $c_{-m} \neq 0$ ;
- eine **wesentliche Singularität** von  $f$ , falls in der Laurent-Reihe unendlich viele Koeffizienten  $c_n$  mit  $n < 0$  von Null verschieden sind.

# Eigenschaften isolierter Singularitäten

**Beobachtung:** (Singularitäten rationaler Funktionen nie wesentlich)

Sei  $f$  eine **rationale Funktion**, d.h.

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad \text{mit } p(z), q(z) \text{ Polynomen.}$$

Dann besitzt  $f$  nur bei den Nullstellen von  $q$  isolierte Singularitäten.  
Diese Singularitäten sind nie wesentlich.

2

**Satz: (Satz von Riemann)**

Die Funktion  $f$  besitze in  $a$  eine isolierte Singularität. Falls  $f$  in einem Kreisring  $B_r(a) \setminus \{a\}$  beschränkt ist, so ist  $a$  eine hebbare Singularität von  $f$ .

**Beweis:** Sei  $f$  beschränkt in  $B_r(a) \setminus \{a\}$  mit  $|f(z)| \leq M$ . Für die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

verschwinden alle  $c_n$  mit  $n < 0$ , denn es gilt die Abschätzung

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} = M \rho^{-n} \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Für  $n < 0$  bekommt man für  $\rho \rightarrow 0$  den Grenzwert Null.

Somit gilt  $c_n = 0$  für alle  $n < 0$ .

**Satz:** (Werteverhalten bei hebbaren Singularitäten)

Sei  $f$  eine analytisch im Kreisring  $B_r(a) \setminus \{a\}$  und sei  $a$  eine hebbare Singularität von  $f$ . Dann existiert der Grenzwert

$$\alpha := \lim_{z \rightarrow a} f(z).$$

Mit der Definition  $f(a) := \alpha$  ist die so erweiterte Funktion  $f$  in der vollen Kreisscheibe  $B_r(a)$  analytisch.

**Beweis:** Mit der Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

bekommt man sofort den Grenzwert  $\alpha = c_0 = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$ . Weiterhin gilt

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{c_1 + c_2(z-a) + c_3(z-a)^2 + \dots - c_0}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{c_1 + c_2(z-a) + c_3(z-a)^2 + \dots}{z - a} = c_1.$$

**Folgerung:**

Ist eine isolierte Singularität  $a$  von  $f$  nicht hebbar, so ist  $f$  in keiner Umgebung von  $a$  beschränkt.

**Satz:**

Hat  $f$  in  $a$  einen Pol, so gilt

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty.$$

Beweis: Sei  $a$  ein isolierter Pol von  $f$ .  
 $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$  mit  $g(z) \neq 0$  für  $z \rightarrow a$ .  
 Dann gilt  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)}{(z-a)^k} = \infty$ .  
 Mit  $n = 0$  und  $\rho = |z-a| < \delta$  folgt die Behauptung unmittelbar.

# Singularitäten

**Beobachtung:** (Singularitäten rationaler Funktionen nie wesentlich)

Sei  $f$  eine **rationale Funktion**, d.h.

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad \text{mit } p(z), q(z) \text{ Polynomen.}$$

Dann besitzt  $f$  nur bei den Nullstellen von  $q$  isolierte Singularitäten.  
Diese Singularitäten sind nie wesentlich.

**Satz:** (Werteverhalten bei hebbaren Singularitäten)

Sei  $f$  eine analytisch im Kreisring  $B_r(a) \setminus \{a\}$  und sei  $a$  eine hebbare Singularität von  $f$ . Dann existiert der Grenzwert

$$\alpha := \lim_{z \rightarrow a} f(z).$$

Mit der Definition  $f(a) := \alpha$  ist die so erweiterte Funktion  $f$  in der vollen Kreisscheibe  $B_r(a)$  analytisch.

**Beweis:** Mit der Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

bekommt man sofort den Grenzwert  $\alpha = c_0 = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$ . Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots - c_0}{z - a} \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots}{z - a} = c_1. \end{aligned}$$



**Satz:** (Satz von Riemann)

Die Funktion  $f$  besitze in  $a$  eine isolierte Singularität. Falls  $f$  in einem Kreisring  $B_r(a) \setminus \{a\}$  beschränkt ist, so ist  $a$  eine hebbare Singularität von  $f$ .

**Beweis:** Sei  $f$  beschränkt in  $B_r(a) \setminus \{a\}$  mit  $|f(z)| \leq M$ . Für die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

verschwinden alle  $c_n$  mit  $n < 0$ , denn es gilt die Abschätzung

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} = M\rho^{-n} \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Für  $n < 0$  bekommt man für  $\rho \rightarrow 0$  den Grenzwert Null.

Somit gilt  $c_n = 0$  für alle  $n < 0$ .

**Folgerung:**

## Folgerung:

Ist eine isolierte Singularität  $a$  von  $f$  nicht hebbar, so ist  $f$  in keiner Umgebung von  $a$  beschränkt.

## Satz:

Hat  $f$  in  $a$  einen Pol, so gilt

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty.$$

**Beweis:** Aus der Laurent-Entwicklung von  $f$  um  $a$ ,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \frac{c_{-m+2}}{(z-a)^{m-2}} + \dots \\ &= \frac{1}{(z-a)^m} [c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + c_{-m+2}(z-a)^2 + \dots] \end{aligned}$$

mit  $m > 0$  und  $c_{-m} \neq 0$ , folgt die Behauptung unmittelbar.

# Satz von Casorati-Weierstrass

**Satz:** (Satz von Casorati-Weierstrass)

Die Funktion  $f$  besitze in  $a \in \mathbb{C}$  eine wesentliche Singularität.

Dann kommen die Werte von  $f$  in jeder Umgebung von  $a$  jeder komplexen Zahl beliebig nahe.

**Beweis:** (durch Widerspruch)

- Sei  $U = B_\delta(a)$  eine Umgebung von  $a \in \mathbb{C}$ .
- Sei  $\epsilon > 0$  so klein, dass  $\overline{U} \cap \overline{U_\epsilon} = \emptyset$  (mit Hilfe unserer Kenntnisse über kompakte Mengen).

- Dann ist die Funktion  $g(z) = \frac{1}{f(z) - \epsilon}$

für  $z \in U$  analytisch und wegen  $g(z) \neq 0$  beschönigt.

- Mit Hilfe von Satz 10.10.10 (oben) existiert ein  $\delta_1 > 0$  sodass  $g$  für  $z \in U_{\delta_1}$  stetig ist.

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \epsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} (f(z) - \epsilon)^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (f(z) - \epsilon)^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (f(z) - \epsilon)^{-n-1}.$$

Dann ist  $g$  in  $U_{\delta_1}$  analytisch.

- Daher folgt die Darstellung von  $f$  für  $z \in U$ :

$$f(z) = \epsilon + \frac{1}{g(z)} = \epsilon + \sum_{n=0}^{\infty} (f(z) - \epsilon)^{-n-1}.$$

- Mit der Taylorentwicklung für  $z \in U$

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{(n)}(z) (z - a)^n.$$

- Mit Hilfe von Satz 10.10.10 (oben)

$$f(z) = \epsilon + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{(n)}(z) (z - a)^n = \epsilon + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{(n)}(z) (z - a)^n.$$

- Dies ist eine Potenzreihe mit unendlich vielen Koeffizienten

# Casorati-Weierstrass

**Satz:** (Satz von Casorati-Weierstrass)

Die Funktion  $f$  besitze in  $a \in \mathbb{C}$  eine wesentliche Singularität.

Dann kommen die Werte von  $f$  in jeder Umgebung von  $a$  jeder komplexen Zahl beliebig nahe.

**Beweis:** (durch Widerspruch)

- Sei  $U = B_r(a) \setminus \{a\}$  eine Umgebung von  $a$  (Kreisring).
- Sei  $w_0 \in \mathbb{C}$ , so dass die Werte von  $f$  in  $U$  **nicht** beliebig nahe an  $w_0$  kommen, d.h. es existiert  $\epsilon > 0$ , so dass

$$|f(z) - w_0| \geq \epsilon \quad \forall z \in U.$$

**Beweis:** (durch Widerspruch)

- Sei  $U = B_r(a) \setminus \{a\}$  eine Umgebung von  $a$  (Kreising).
- Sei  $w_0 \in \mathbb{C}$ , so dass die Werte von  $f$  in  $U$  **nicht** beliebig nahe an  $w_0$  kommen, d.h. es existiert  $\epsilon > 0$ , so dass

$$|f(z) - w_0| \geq \epsilon \quad \forall z \in U.$$

- Dann ist die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

für  $z \in U$  analytisch und wegen  $|g(z)| \leq \frac{1}{\epsilon}$  beschränkt.

- Mit obigem Satz ist dann aber  $a$  eine hebbare Singularität von  $g$ , so dass in  $U$  für  $m \geq 0$  gilt

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n} (z-a)^n = (z-a)^m g_1(z).$$

Dabei ist  $g_1$  in  $B_r(a)$  analytisch.

- Daraus folgt die Darstellung von  $f$  für  $z \in U$

$$f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)} = w_0 + \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{g_1(z)}.$$

- Mit der Taylor-Entwicklung für  $z \in U$

$$\frac{1}{g_1(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

- Erhalte die Laurent-Reihe von  $f$  in  $U$

$$f(z) = \frac{b_0}{(z-a)^m} + \frac{b_1}{(z-a)^{m-1}} + \cdots - b_m + w_0 + b_{m+1}(z-a) + \cdots$$

- Dies stellt einen Widerspruch zur Annahme dar,  $a$  sei eine wesentliche Singularität.

# Hauptteil einer Laurent-Reihe

**Definition:** (Hauptteil einer Laurent-Reihe)

Sei  $a$  isolierte Singularität der Funktion  $f$  und sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

Laurent-Reihe von  $f$  um  $a$ . Dann heißt die Funktion

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$$

der zu  $a$  gehörige **Hauptteil** von  $f$ .

**Bemerkungen:**

- Für eine hebbare Singularität verschwindet der Hauptteil.
- Für einen Pol ist der Hauptteil ein Polynom in  $\frac{1}{(z-a)^k}$ .

**Satz:**

Eine rationale Funktion  $f$ , die im Unendlichen verschwindet, ist die Summe ihrer Hauptteile:

$$f = h_1 + h_2 + \dots + h_N.$$

**Beweis:** Sei  $f$  rational. Dann ist  $f$  ein Quotient zweier Polynome auf endlich vielen Punkten  $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$  und  $\infty$ . Bestimmen die zugehörigen Hauptteile

$$h_k(z) = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{c_{kj}}{(z-a_k)^j} \quad \text{für } k=1, \dots, N,$$

wo  $f$  eine in der Funktion  $g(z) = \sum_{k=1}^N h_k(z)$  zerlegt werden kann. Dann ist  $f$  die Summe der zugehörigen Hauptteile  $h_k$  der Laurent-Reihe von  $f$  um  $a_k$  möglich, da  $a_k$  die isolierten Singularitäten sind für  $k=1, \dots, N$ . Dann ist  $g$  eine ganze Funktion, d.h.  $g$  ist ein Polynom von Grad  $\leq N$ . Sei  $d = \deg(g)$ .

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N h_k(z) = 0.$$

Sei  $h$  der Hauptteil von  $f$  bei  $\infty$ , dann ist  $f-h$  eine ganze Funktion, die im Unendlichen verschwindet.



**Definition:** (Hauptteil einer Laurent-Reihe)

Sei  $a$  isolierte Singularität der Funktion  $f$  und sei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

Laurent-Reihe von  $f$  um  $a$ . Dann heißt die Funktion

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - a)^n$$

der zu  $a$  gehörige **Hauptteil** von  $f$ .

**Bemerkungen:**

## Bemerkungen:

- Für eine hebbare Singularität verschwindet der Hauptteil.
- Für einen Pol ist der Hauptteil ein Polynom in  $\frac{1}{(z-a)}$ .

## Satz:

Eine rationale Funktion  $f$ , die im Unendlichen verschwindet, ist die Summe ihrer Hauptteile:

$$f = h_1 + h_2 + \cdots + h_N.$$

**Beweis:** Sei  $f$  rational. Dann ist  $f$  in der komplexen Ebene bis auf endlich viele Polstellen  $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$  analytisch. Betrachte nun die zugehörigen Hauptteile

$$h_k(z) = \sum_{n=1}^{m_k} \frac{c_{kn}}{(z - z_k)^n} \quad \text{für } k = 1, \dots, N,$$

von  $f$ . Dann ist die Funktion  $g = f - \sum_{k=1}^N h_k$  in  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$  analytisch.

Da nun für jedes  $z_k$  der zugehörige Hauptteil  $h_k$  in der Laurent-Reihe von  $g$  um  $z_k$  wegfällt, ist  $z_k$  eine hebbare Singularität von  $g$ , für  $k = 1, \dots, N$ .

Damit ist  $g$  eine ganze Funktion, d.h.  $g$  ist analytisch auf ganz  $\mathbb{C}$ .

Schließlich gilt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) - \sum_{k=1}^N \lim_{z \rightarrow \infty} h_k(z) = 0,$$

somit ist  $g$  beschränkt auf  $\mathbb{C}$ , nach dem Satz von Liouville konstant mit  $g \equiv 0$ .

## Erinnerung

**Definition (Einfachheit)**  
Eine Funktion  $f$  heißt **einfach**, wenn für jedes  $w \in \mathbb{C}$  die Gleichung  $f(z) = w$  höchstens eine Lösung  $z \in D_f$  besitzt.

**Definition (Einfachheit)**  
Eine Funktion  $f$  heißt **einfach**, wenn für jedes  $w \in \mathbb{C}$  die Gleichung  $f(z) = w$  höchstens eine Lösung  $z \in D_f$  besitzt.

**Definition (Einfachheit)**  
Eine Funktion  $f$  heißt **einfach**, wenn für jedes  $w \in \mathbb{C}$  die Gleichung  $f(z) = w$  höchstens eine Lösung  $z \in D_f$  besitzt.

## Komplexe Funktionen

Definition  
Beispiel  
Eigenschaften

## Eigenschaften isolierter Singularitäten

**Definition (Isolierte Singularität)**  
Eine Funktion  $f$  hat eine **isolierte Singularität** in  $z_0$ , wenn  $z_0 \in D_f$  und es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $z_0$  die einzige Singularität in  $D_f \cap \{z : |z - z_0| < \delta\}$  ist.

**Definition (Isolierte Singularität)**  
Eine Funktion  $f$  hat eine **isolierte Singularität** in  $z_0$ , wenn  $z_0 \in D_f$  und es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $z_0$  die einzige Singularität in  $D_f \cap \{z : |z - z_0| < \delta\}$  ist.

## Isolierte Singularität

**Definition (Isolierte Singularität)**  
Eine Funktion  $f$  hat eine **isolierte Singularität** in  $z_0$ , wenn  $z_0 \in D_f$  und es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $z_0$  die einzige Singularität in  $D_f \cap \{z : |z - z_0| < \delta\}$  ist.

**Definition (Isolierte Singularität)**  
Eine Funktion  $f$  hat eine **isolierte Singularität** in  $z_0$ , wenn  $z_0 \in D_f$  und es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $z_0$  die einzige Singularität in  $D_f \cap \{z : |z - z_0| < \delta\}$  ist.

## Hauptteil einer Laurent-Reihe

**Definition (Hauptteil)**  
Der **Hauptteil** einer Laurent-Reihe ist der Teil der Reihe, der die negativen Potenzen von  $z$  enthält.

**Definition (Hauptteil)**  
Der **Hauptteil** einer Laurent-Reihe ist der Teil der Reihe, der die negativen Potenzen von  $z$  enthält.

## Satz von Casorati-Weierstrass

**Satz von Casorati-Weierstrass**  
Sei  $f$  eine Funktion, die in einem Punkt  $z_0$  eine **isolierte Singularität** hat. Dann ist  $f$  in jeder Umgebung von  $z_0$  **dicht** in  $\mathbb{C}$ .

