Komplexe Funktionen

07. 06. 2018

J. Behrens

① Beweis:

- Sei $F_{z_0}(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$ für $z \in G$
- Behauptung: F_{z_0} analytisch mit $F_{z_0}'(z) = f(z)$ $\forall z \in G$.
- Betrachte: Differenzenquotient von F_{z_0} bei z:

$$d(\ell) = \frac{F_{z_0}(z+\ell) - F_{z_0}(z)}{\ell} = \frac{1}{\ell}\left[\int_{z_0}^{z+\ell} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta\right]$$

$$= \frac{1}{\ell}\int_{z}^{z+\ell} f(\zeta)\, d\zeta = \int_0^1 f(z+\ell t)\, dt$$

$$\int_{z_0}^{z+\ell} = \int_{z_0}^{z} + \int_{z}^{z+\ell}$$

- Grenzübergang: $\ell \to 0$:

$$\lim_{\ell \to 0} \int_0^1 f(z+t\ell)\, dt = f(z) = \lim_{\ell \to 0} d(\ell) = F_{z_0}'(z) \qquad \boxtimes$$

② Berechnung des Integrals:

- Betrachte $z_0, z_1 \in G$ und $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$, f analytisch, G einfach zshg. Gebiet.

- Sei F beliebige Stammfunktion von f auf G

$$\Rightarrow \quad F_{z_0}(z) = F(z) + c \quad , \quad c \in \mathbb{C} \text{ Konstante.}$$

- Nun ist $F_{z_0}(z_0) = 0$, daher folgt

$$c = -F(z_0)$$

- Damit gilt

$$F_{z_0}(z) = F(z) - F(z_0)$$

- Schließlich folgt:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F_{z_0}(z_1) = F(z_1) - F(z_0)$$

Beispiel:

- Betrachte $a, b > 0$, $\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{1}{z^2}\,dz$

- Verwende Stammfunktion $f(z) = -\frac{1}{z}$

Dann gilt:

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{1}{z^2}\,dz = -\frac{1}{z}\Big|_{a-ib}^{a+ib} = -\frac{1}{a+ib} + \frac{1}{a-ib} = \frac{2ib}{a^2+b^2}$$

- Integriere längs der Kurve $z(t) = a + it$, $-b \leq t \leq b$

Dann gilt:

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{1}{z^2}\, dz = i \int_{-b}^{b} \frac{1}{(a+it)^2}\, dt = -\frac{1}{a+it}\Bigg|_{-b}^{b} = \frac{2ib}{a^2+b^2}$$

③ Cauchysche Integralformel:

- $g(z) = \dfrac{f(z)}{z-a}$, $G' = G \setminus \{a\}$, Γ einfach geschl. Kurve um a

- Mit dem verallgemeinerten Cauchyschen Integralsatz:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

wobei $\Gamma_r \subset G'$ der positiv durchlaufene Rand des Kreises um a mit Radius r ist.

- Parametrisierung: $\Gamma_r : t \mapsto z(t) = a + re^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

- mit $dz = i\, re^{it}\, dt$ erhalte

$$\int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = i \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{re^{it}}\, re^{it}\, dt = i\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\, dt$$

$$= \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

- Grenzübergang $r \to 0$:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 2\pi i\, f(a) \qquad \text{oder}$$

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}\, dz}$$

4 Beweis Fundamentalsatz:

- Für komplexe Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ sei

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

ein beliebiges Polynom vom Grad $n \geq 1$.

- Annahme: $p(z)$ besitzt keine komplexe Nullstelle, $p(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$
- Dann ist $f(z) = \frac{1}{p(z)} = \frac{1}{a_n z^n + \dots a_1 z + a_0}$ analytisch auf ganz $\mathbb{C}$.
- Es gilt:

$$\lim_{z \to \infty} |f(z)| = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{|a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0|}$$

$$= \lim_{z \to \infty} \left| \frac{1}{a_n z^n} \right| \cdot \lim_{z \to \infty} \frac{1}{\left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n}\right|} = 0$$

- Also muss $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Maximum besitzen
- Maximumprinzip: f ist konstant in $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ p ist konstant

$\lightning$ zu $n \geq 1$