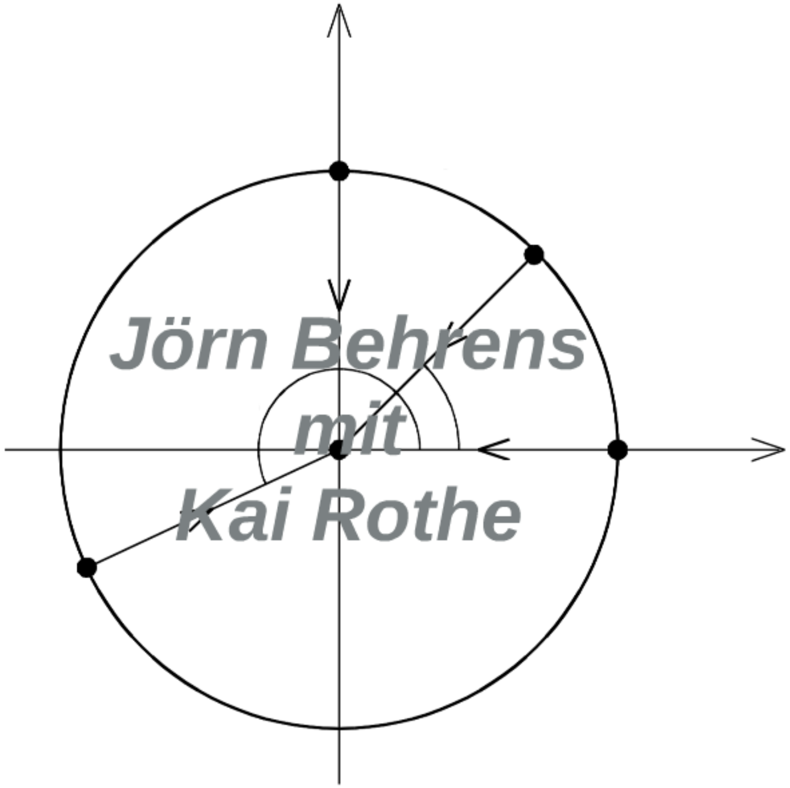
Komplexe Funktionen

Sommer 2018



Jörn Behrens

mit

Kai Rothe

Fortsetzung

Komplexe Integration

Erinnerung

Definition: (Komplexes Kurvenintegral)
Falls für jede Zerlegungsfolge $z_0, \ldots, z_n$ für Γ mit

$$\max_{0 \le k < n} |\Delta z_k| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

und jede Wahl von Zwischenpunkten $\zeta_k \in \Gamma|_{[z_k, z_{k+1}]}$ der Grenzwert der Partialsummen existiert und jeweils den selben Wert ergibt, so wird der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) \Delta z_k = \int_\Gamma f(z)\, dz$$

als Integral der Funktion f längs der Kurve Γ bezeichnet.
Man spricht vom komplexen Kurvenintegral des Integranden f auf dem Integrationsweg Γ.

"Rezept" zur Integralberechnung

Aufgabe: Berechne komplexes Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f(z)\, dz$$

Lösungsweg:

(a) Stelle den Integrationsweg Γ in Parameterform dar

$$\Gamma : t \mapsto z(t) \qquad \text{für } \alpha \le t \le \beta$$

(b) Substituiere im Integral $z = z(t)$, somit $dz = z'(t)\, dt$;

(c) Ersetze den Integrationsweg Γ durch die reellen Grenzen α und β.

(d) Berechne das Integral

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t)\, dt.$$

Eigenschaften

- Additivität bezüglich des Integranden.
  Für zwei komplexe Funktionen f und g gilt
  $$\int_\Gamma (f(z) + g(z))\, dz = \int_\Gamma f(z)\, dz + \int_\Gamma g(z)\, dz.$$
- Homogenität bezüglich des Integranden.
  Für eine komplexe Funktionen f und eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ gilt
  $$\int_\Gamma c f(z)\, dz = c \int_\Gamma f(z)\, dz.$$
- Additivität bezüglich des Integrationsweges. Seien Γ_1 und Γ_2 zwei Kurven, wobei der Endpunkt von Γ_1 mit dem Anfangspunkt von Γ_2 übereinstimmt. Dann gilt für die zusammengesetzte Kurve $\Gamma_1 + \Gamma_2$
  $$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz.$$
- Homogenität bezüglich des Integrationsweges.
  Sei $-\Gamma$ die zu Γ in entgegengesetzter Richtung durchlaufene Kurve. Dann gilt
  $$\int_{-\Gamma} f(z)\, dz = -\int_\Gamma f(z)\, dz.$$
- Obere Schranke für den Betrag des Integrals.
  Sei L die Länge der Kurve Γ. Dann gilt die Standardabschätzung
  $$\left| \int_\Gamma f(z)\, dz \right| \le L \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$$

Beweis: Mit $M = \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$ gilt die Abschätzung

$$|S_n| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \le \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)| |\Delta z_k| \le M \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k| \le ML$$

für die n-te Partialsumme und somit $|S_n| \le ML$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ folgt die Behauptung.

Satz: (Cauchyscher Integralsatz)
Sei $f : D \to W$ auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subseteq D$ analytisch.
Dann gilt für jede geschlossene Kurve $\Gamma \subset G$

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

Also: das Integral längs geschlossener Kurven in G ist Null.

Definition: (Komplexes Kurvenintegral)
Falls für jede Zerlegungsfolge $z_0, \ldots, z_n$ für Γ mit

$$\max_{0\leq k<n} |\Delta z_k| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

und jede Wahl von Zwischenpunkten $\zeta_k \in \Gamma|_{[z_k, z_{k+1}]}$ der Grenzwert der Partialsummen existiert und jeweils den selben Wert ergibt, so wird der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k =: \int_\Gamma f(z)\, dz$$

als Integral der Funktion f längs der Kurve Γ bezeichnet.
Man spricht vom komplexen Kurvenintegral des Integranden f auf dem Integrationsweg Γ.

Eigensc

"Rezept" zur Integralberechnung

Aufgabe: Berechne komplexes Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f(z)\,dz$$

Lösungsweg:

(a) Stelle den Integrationsweg Γ in Parameterform dar

$$\Gamma : t \mapsto z(t) \qquad \text{für } \alpha \leq t \leq \beta$$

(b) Substituiere im Integral $z = z(t)$, somit $dz = z'(t)\,dt$;

(c) Ersetze den Integrationsweg Γ durch die reellen Grenzen α und β.

(d) Berechne das Integral

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt.$$

Eigenschaften

- **Additivität bezüglich des Integranden.**
  Für zwei komplexe Funktionen f und g gilt
  $$\int_\Gamma (f(z) + g(z))\, dz = \int_\Gamma f(z)\, dz + \int_\Gamma g(z)\, dz.$$

- **Homogenität bezüglich des Integranden.**
  Für eine komplexe Funktionen f und eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ gilt
  $$\int_\Gamma c f(z)\, dz = c \int_\Gamma f(z)\, dz.$$

- **Additivität bezüglich des Integrationsweges.** Seien Γ_1 und Γ_2 zwei Kurven, wobei der Endpunkt von Γ_1 mit dem Anfangspunkt von Γ_2

$$\int_\Gamma c f(z)\, dz = c \int_\Gamma f(z)\, dz.$$

- Additivität bezüglich des Integrationsweges. Seien Γ_1 und Γ_2 zwei Kurven, wobei der Endpunkt von Γ_1 mit dem Anfangspunkt von Γ_2 übereinstimmt. Dann gilt für die zusammengesetzte Kurve $\Gamma_1 + \Gamma_2$

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz.$$

- Homogenität bezüglich des Integrationsweges.
  Sei $-\Gamma$ die zu Γ in entgegengesetzter Richtung durchlaufene Kurve. Dann gilt

$$\int_{-\Gamma} f(z)\, dz = -\int_\Gamma f(z)\, dz.$$

- Obere Schranke für den Betrag des Integrals.
  Sei L die Länge der Kurve Γ. Dann gilt die Standardabschätzung

- Obere Schranke für den Betrag des Integrals.
  Sei L die Länge der Kurve Γ. Dann gilt die Standardabschätzung

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \le L \max_{z\in\Gamma} |f(z)|$$

Beweis: Mit $M = \max_{z\in\Gamma} |f(z)|$ gilt die Abschätzung

$$|S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \le M \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k| \le ML$$

für die n-te Partialsumme und somit $|S_n| \le ML$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ folgt die Behauptung.

für die n-te Partialsumme und somit $|S_n| \leq ML$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ folgt die Behauptung.

Satz: (Cauchyscher Integralsatz)
Sei $f : D \to W$ auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset D$ analytisch.
Dann gilt für jede geschlossene Kurve $\Gamma \subset G$

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

Also: das Integral längs geschlossener Kurven in G ist Null.

Folgerung des Cauchyschen Integralsatzes

Annahme: Γ umlaufe den Einheitskreisrand einmal im positiven Sinne.

Beispiel 1: $f(z) = z$ ist analytisch auf ganz $\mathbb{C}$. Somit ist der Cauchysche Integralsatz anwendbar und es gilt

$$\int_\Gamma z \, dz = 0.$$

Beispiel 2: Für $f(z) = \bar{z}$ ist der Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar, denn f ist in keinem Gebiet analytisch. Es gilt

$$\int_\Gamma \bar{z} \, dz = 2\pi i.$$

Beispiel 3: Die Funktion $f(z) = 1/z$ ist analytisch in dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Allerdings ist $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend und somit ist der Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar. Es gilt

$$\int_\Gamma \frac{1}{z} \, dz = 2\pi i.$$

Folgerung: (Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals)

- **Voraussetzungen**:
  - Sei f analytisch im einfach zusammenhängenden Gebiet G.
  - Seien Γ_1 und Γ_2 zwei Wege in G mit denselben Anfangs- und Endpunkten z_0 und z_1.
- Mit dem Cauchyschen Integralsatz gilt:

$$\int_{\Gamma_1 - \Gamma_2} f(z) \, dz = 0.$$

- Damit folgt aber

$$\int_{\Gamma_1} f(z) \, dz = \int_{\Gamma_2} f(z) \, dz$$

- Das Integral hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab:

$$\int_{\Gamma_1} f(z) \, dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z) \, dz$$

Annahme: Γ umlaufe den Einheitskreisrand einmal im positiven Sinne.

Beispiel 1: $f(z) = z$ ist analytisch auf ganz $\mathbb{C}$. Somit ist der Cauchysche Integralsatz anwendbar und es gilt

$$\int_\Gamma z \, dz = 0.$$

Beispiel 2: Für $f(z) = \overline{z}$ ist der Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar, denn f ist in keinem Gebiet analytisch. Es gilt

$$\int_\Gamma \overline{z} \, dz = 2\pi i.$$

Beispiel 3: Die Funktion $f(z) = 1/z$ ist analytisch in dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Allerdings ist $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend und somit ist der Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar. Es gilt

$$\int_\Gamma \frac{1}{z} \, dz = 2\pi i.$$

Folgerung: (Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals)

- **Voraussetzungen**:

Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar. Es gilt

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}.$$

Folgerung: (Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals)

- **Voraussetzungen**:
  - Sei f analytisch im einfach zusammenhängenden Gebiet G.
  - Seien Γ_1 und Γ_2 zwei Wege in G mit denselben Anfangs- und Endpunkten z_0 und z_1.
- Mit dem Cauchyschen Integralsatz gilt:

$$\int_{\Gamma_1-\Gamma_2} f(z)\ dz = 0.$$

- Damit folgt aber

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\ dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\ dz$$

- Das Integral hängt nur vom Anfangs und Endpunkt des Weges ab:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\ dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\ dz$$

Konstruktion von Stammfunktionen

Ausgangspunkt: Betrachte für festes $z_0 \in G$ und analytisches f die Funktion

$$F_{z_0}(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta \qquad \text{für } z \in G.$$

Behauptung: Die Funktion F_{z_0} ist analytisch und es gilt

$$F'_{z_0}(z) = f(z) \qquad \text{für alle } z \in G.$$

1

Satz: (Hauptsatz der komplexen Integralrechnung)
Sei f analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und sei $z_0 \in G$.
Dann ist die Funktion

$$F_{z_0}(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

für $z \in G$ analytisch und es gilt

$$F'_{z_0} = f \quad \text{auf } G.$$

Definition: (Stammfunktion)
Sei F analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G mit $F' = f$.
Dann heißt F Stammfunktion von f auf G.

2

Bemerkungen:

- **Erreicht:** Wir haben eine Formel, die es erlaubt, "wie in der Schule" zu integrieren!
- **Frage:** Was aber mit Integralen für Gebiete G, die nicht einfach zusammenhängend sind?
- **Problem:** Cauchyscher Integralsatz ist dann nicht anwendbar!
  Beispiel oben: für positiv orientierten Einheitsrand Γ und Gebiet $G = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ erhalte
  $$\int_\Gamma \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i \neq 0.$$
- Falls aber das von Γ umschlossene Gebiet ganz in G liegt, so ist der Cauchysche Integralsatz anwendbar!
  Für das Beispiel gilt dann:
  $$\int_\Gamma \frac{1}{z}\, dz = 0.$$

Ausgangspunkt: Betrachte für festes $z_0 \in G$ und analytisches f die Funktion

$$F_{z_0}(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta \qquad \text{für } z \in G.$$

Behauptung: Die Funktion F_{z_0} ist analytisch und es gilt

$$F'_{z_0}(z) = f(z) \qquad \text{für alle } z \in G.$$

1

Satz: (Hauptsatz der komplexen Integralrechnung)
Sei f analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und sei $z_0 \in G$.
Dann ist die Funktion

$$F_{z_0}(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

für $z \in G$ analytisch und es gilt

$$F'_{z_0} = f \quad \text{auf } G.$$

Definition: (Stammfunktion)
Sei F analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G mit $F' = f$.
Dann heißt F Stammfunktion von f auf G.

Bemerkungen:

- **Erreicht:** Wir haben eine Formel, die es erlaubt, "wie in der Schule" zu

Bemerkungen:

- **Erreicht:** Wir haben eine Formel, die es erlaubt, “wie in der Schule” zu integrieren!

- **Frage:** Was aber mit Integralen für Gebiete G, die nicht einfach zusammenhängend sind?

- **Problem:** Cauchyscher Integralsatz ist dann nicht anwendbar!
  Beispiel oben: für positiv orientierten Einheitsrand Γ und Gebiet $G = \mathbb{C} \backslash \{0\}$ erhalte
  $$\int_\Gamma \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i \neq 0.$$

- Falls aber das von Γ umschlossene Gebiet ganz in G liegt, so ist der Cauchysche Integralsatz anwendbar!
  Für das Beispiel gilt dann:
  $$\int_\Gamma \frac{1}{z}\, dz = 0.$$

Zweifach zusammenhängende Gebiete

Bemerkungen: (Nicht einfach zusammenhängende Gebiete)

- Sei G ein zweifach zusammenhängendes Gebiet (G hat genau ein Loch L).
- Seien Γ_1 und Γ_2 zwei positiv orientierte geschlossene Wege, die L einmal umlaufen.
- Verbinde Γ_1 und Γ_2 durch zwei weitere geschlossene Kurvenstücke Γ' und Γ'', die in G liegen.
- **Cauchyscher Integralsatz:** Für f analytisch auf G gilt:

$$\int_{\Gamma'} f\, dz = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma''} f\, dz = 0$$

- Weiter gilt:

$$\int_{\Gamma'} f + \int_{\Gamma''} f = \int_{\Gamma_1} f + \int_{-\Gamma_2} f = \int_{\Gamma_1} f - \int_{\Gamma_2} f = 0$$

- Damit folgt:

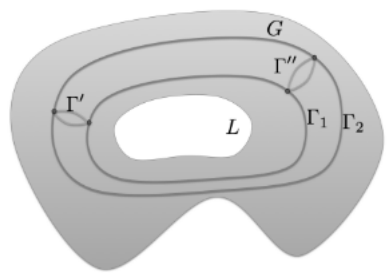
$$\int_{\Gamma_1} f\, dz = \int_{\Gamma_2} f\, dz$$

Satz: (Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes)
Sei f analytisch in einem zweifach zusammenhängenden Gebiet G mit Loch L. Dann besitzt das Integral

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz$$

längs jeder geschlossenen Kurve in G, die L einmal im positiven Sinne umläuft, denselben Wert.
Bemerkung: Diese Aussage lässt sich analog auf mehrfach zusammenhängende Gebiete verallgemeinern.

Bemerkungen: **(Nicht einfach zusammenhängende Gebiete)**



- **Sei G ein zweifach zusammenhängendes Gebiet (G hat genau ein Loch L).**
- **Seien Γ_1 und Γ_2 zwei positiv orientierte geschlossene Wege, die L einmal umlaufen.**
- Verbinde Γ_1 und Γ_2 durch zwei weitere geschlossene Kurvenstücke Γ' und Γ'', die in G liegen.
- **Cauchyscher Integralsatz:** Für f analytisch auf G gilt:

$$\int_{\Gamma'} f \; dz = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma''} f \; dz = 0$$

- Weiter gilt:

$$\int_{\Gamma'} f + \int_{\Gamma''} f = \int_{\Gamma_1} f + \int_{-\Gamma_2} f = \int_{\Gamma_1} f - \int_{\Gamma_2} f = 0$$

- Damit folgt:

$$\int_{\Gamma_1} f \; dz = \int_{\Gamma_2} f \; dz$$

folgt:

$$\int_{\Gamma_1} f\ dz = \int_{\Gamma_2} f\ dz$$

Satz: (Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes)
Sei f analytisch in einem zweifach zusammenhängenden Gebiet G mit Loch L. Dann besitzt das Integral

$$\int_{\Gamma} f(z)\ dz$$

längs jeder geschlossenen Kurve in G, die L einmal im positiven Sinne umläuft, denselben Wert.

Bemerkung: Diese Aussage lässt sich analog auf mehrfach zusammenhängende Gebiete verallgemeinern.

Cauchysche Integralformel

Vorbemerkungen:

- Sei G wieder einfach zusammenhängendes Gebiet.
- Γ sei eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve in G.
- $a \in G$ sei ein Punkt, der von Γ umlaufen wird.
- f sei analytisch auf G.

Beobachtung: Die Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - a}$$

ist analytisch auf dem zweifach zusammenhängenden Gebiet $G' = G \backslash \{a\}$.

3

Satz: (Cauchysche Integralformel)
Sei f analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und sei Γ eine geschlossene positiv orientierte Kurve in G. Dann gilt für jeden Punkt $a \in G$, der von Γ umlaufen wird, die Cauchysche Integralformel

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - a}\, dz.$$

Bemerkungen:

- **Interpretation.** Die Werte einer analytischen Funktion $f(z)$ sind für alle $z \in G$, die von $\Gamma \subset G$ umlaufen werden, vollständig durch die Werte von f auf Γ bestimmt.
- **Folgerung:** Falls f im Inneren des von Γ umlaufenden Gebietes abgeändert wird, aber nicht auf Γ, so ist die daraus resultierende Funktion $\tilde{f}$ nicht mehr analytisch.
- **Folgerung:** Stimmen zwei analytische Funktionen f und g auf Γ überein, so stimmen sie auf dem von Γ umschlossenen Gebiet überein (d.h. $f \equiv g$).

Vorbemerkungen:

- Sei G wieder einfach zusammenhängendes Gebiet.
- Γ sei eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve in G.
- $a \in G$ sei ein Punkt, der von Γ umlaufen wird.
- f sei analytisch auf G.

Beobachtung: Die Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-a}$$

ist analytisch auf dem zweifach zusammenhängenden Gebiet $G' = G \backslash \{a\}$.

3

$z - a$

ist analytisch auf dem zweifach zusammenhängenden Gebiet $G' = G\backslash\{a\}$.

Satz: (Cauchysche Integralformel)
Sei f analytisch in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und sei Γ eine geschlossene positiv orientierte Kurve in G. Dann gilt für jeden Punkt $a \in G$, der von Γ umlaufen wird, die Cauchysche Integralformel

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - a}\, dz.$$

Bemerkungen:

- **Interpretation**: Die Werte einer analytischen Funktion $f(z)$ sind für alle

Bemerkungen:

- **Interpretation**: Die Werte einer analytischen Funktion $f(z)$ sind für alle $z \in G$, die von $\Gamma \subset G$ umlaufen werden, vollständig durch die Werte von f auf Γ bestimmt.
- **Folgerung:** Falls f im Inneren des von Γ umlaufenden Gebietes abgeändert wird, aber nicht auf Γ, so ist die daraus resultierende Funktion $\tilde{f}$ nicht mehr analytisch.
- **Folgerung:** Stimmen zwei analytische Funktionen f und g auf Γ überein, so stimmen sie auf dem von Γ umschlossenen Gebiet überein (d.h. $f \equiv g$).

Anwendungen der Cauchyschen Integralformel

Satz (Mittelwerteigenschaft): *Der Wert einer analytischen Funktion f im Mittelpunkt einer in ihrem Definitionsbereich enthaltenen Kreisscheibe stimmt mit dem Mittelwert von f auf dem Kreisrand überein.*

Beweis: Sei f analytisch auf G, $a \in G$, und sei Γ ein in G enthaltener positiv orientierter Kreisrand um a mit Radius r, der a einmal umläuft. Dann gilt die Cauchysche Integralformel

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

bzw. (wie bereits mit der Parametrisierung $z(t) = a + re^{it}$ hergeleitet)

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt.$$

Die rechte Seite beschreibt den Mittelwert von f auf Γ.

Satz (Fundamentalsatz der Algebra): *Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ besitzt mindestens eine Nullstelle in der komplexen Ebene.*

Satz (Maximumprinzip): *Sei f eine analytische Funktion auf einem Gebiet G. Falls es einen Punkt $z_0 \in G$ gibt mit*

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \qquad \text{für alle } z \in G,$$

so ist f auf G konstant.

Satz: *Sei f eine analytische Funktion auf einem beschränkten Gebiet G. Sei weiterhin f stetig auf $\overline{G}$ und nicht konstant. Dann nimmt die Funktion $|f(z)|$ ihren maximalen Wert nur auf dem Rand von G an.*

Beweis: Angenommen, $|f|$ nimmt ihr Maximum im Inneren von G an. Dann ist f nach dem Maximumprinzip konstant. Dies widerspricht der Annahme.

Satz (Mittelwerteigenschaft): *Der Wert einer analytischen Funktion f im Mittelpunkt einer in ihrem Definitionsbereich enthaltenen Kreisscheibe stimmt mit dem Mittelwert von f auf dem Kreisrand überein.*

Beweis: Sei f analytisch auf G, $a \in G$, und sei Γ ein in G enthaltener positiv orientierter Kreisrand um a mit Radius r, der a einmal umläuft. Dann gilt die Cauchysche Integralformel

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a} \, dz$$

bzw. (wie bereits mit der Parametrisierung $z(t) = a + re^{it}$ hergeleitet)

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) \, dt.$$

Die rechte Seite beschreibt den Mittelwert von f auf Γ.

Satz (Maximumprinzip): *Sei f eine analytische Funktion auf einem Gebiet G. Falls es einen Punkt $z_0 \in G$ gibt mit*

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \qquad \text{für alle } z \in G,$$

so ist f auf G konstant.

Beweisskizze:

- Sei $z_0 \in G$ maximal mit $M := |f(z_0)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in G$.
- Mittelwerteigenschaft:

$$\begin{aligned} M &= |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt\right| \\ \Rightarrow \quad M &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\, dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\, dt = M. \end{aligned}$$

- Damit folgt

$$|f(z_0 + re^{it})| = M \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- Also ist $|f|$ auf jedem in G gelegenen Kreis um z_0 konstant.
- Man kann das gesamte Gebiet G mit Kreisscheiben überdecken, also $|f| \equiv M$ auf ganz G.
- Mit Cauchy-Riemannschen DGLn folgt $f \equiv M$ auf ganz G.

Beweisskizze:

- Sei $z_0 \in G$ maximal mit $M := |f(z_0)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in G$.
- Mittelwerteigenschaft:

$$\begin{aligned} M &= |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\ dt \right| \\ \Rightarrow \quad M &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\ dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M\ dt = M. \end{aligned}$$

- Damit folgt

$$|f(z_0 + re^{it})| = M \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- Also ist $|f|$ auf jedem in G gelegenen Kreis um z_0 konstant.
- Man kann das gesamte Gebiet G mit Kreisscheiben überdecken, also $|f| \equiv M$ auf ganz G.
- Mit Cauchy-Riemannschen DGLn folgt $f \equiv M$ auf ganz G.

- Also ist $|f|$ auf jedem in G gelegenen Kreis um z_0 konstant.
- Man kann das gesamte Gebiet G mit Kreisscheiben überdecken, also $|f| \equiv M$ auf ganz G.
- Mit Cauchy-Riemannschen DGLn folgt $f \equiv M$ auf ganz G.

Satz: *Sei* f *eine analytische Funktion auf einem beschränkten Gebiet* G*. Sei weiterhin* f *stetig auf* $\overline{\mathrm{G}}$ *und nicht konstant. Dann nimmt die Funktion* $|\mathrm{f}(z)|$ *ihren maximalen Wert nur auf dem Rand von* G *an.*

Beweis: Angenommen, $|\mathrm{f}|$ nimmt ihr Maximum im Inneren von G an. Dann ist f nach dem Maximumprinzip konstant. Dies widerspricht der Annahme.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0$$

Die rechte Seite beschreibt den Mittelwert von f auf Γ.

Satz (Fundamentalsatz der Algebra)**:** *Jedes Polynom vom Grad* $n \geq 1$ *besitzt mindestens eine Nullstelle in der komplexen Ebene.*

4

Cauchysche Integralformel für Ableitungen

Voraussetzungen:

- Sei f analytisch in G;
- Γ eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve in G.
- das Innere G_Γ des von Γ umschlossenen Gebietes gehöre ganz zu G, $G_\Gamma \subset G$.

Cauchysche Integralformel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in G_\Gamma$$

Differentiation: Nun gilt

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z)^2}$$

und somit

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in G_\Gamma$$

Verallgemeinerung: Erneutes (wiederholtes) Differenzieren des Integranden,

$$\frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{\zeta - z} = \frac{n!}{(\zeta - z)^{n+1}} \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

liefert die Darstellung

$$f^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in G_\Gamma$$

für die höheren Ableitungen $f^{(n)}$ von f für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Satz (`Cauchysche Integralformel für die Ableitungen`)**:** *Sei f in einem Gebiet analytisch. Dann existieren alle Ableitungen von f in G, und diese Ableitungen sind jeweils analytisch in G. Weiterhin gilt für eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve $\Gamma \subset G$, deren Inneres G_Γ ganz in G liegt, die Cauchysche Integralformel*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in G_\Gamma$$

für die Ableitungen $f^{(n)}$ von f für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Bemerkungen:

- Für $n = 0$ liefert die obige Formel die Cauchysche Integralformel für f.
- Es gilt der Grundsatz einmal holomorph, immer holomorph:
  Eine analytische Funktion f lässt sich in ihrem Definitionsbereich beliebig oft differenzieren.
  Oder: Ist f in G komplex diff'bar, so existieren alle Ableitungen $f^{(n)}$ in G $(n = 1, 2, \ldots)$.

Voraussetzungen:

- Sei f analytisch in G;
- Γ eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve in G.
- das Innere G_Γ des von Γ umschlossenen Gebietes gehöre ganz zu G, $G_\Gamma \subset G$.

Cauchysche Integralformel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in G_\Gamma$$

Differentiation: Nun gilt

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z)^2}$$

und somit

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in G_\Gamma$$

Verallgemeinerung: Erneutes (wiederholtes) Differenzieren des Integranden,

$$\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{\zeta - z} = \frac{n!}{(\zeta - z)^{n+1}} \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

liefert die Darstellung

$$f^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in G_\Gamma$$

für die höheren Ableitungen $f^{(n)}$ von f für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

$d\zeta \qquad$ für alle $z \in G_\Gamma$

Satz (Cauchysche Integralformel für die Ableitungen): *Sei* f *in einem Gebiet analytisch. Dann existieren alle Ableitungen von* f *in* G*, und diese Ableitungen sind jeweils analytisch in* G*. Weiterhin gilt für eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve* $\Gamma \subset G$*, deren Inneres* G_Γ *ganz in* G *liegt, die Cauchysche Integralformel*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in G_\Gamma$$

für die Ableitungen $f^{(n)}$ *von* f *für* $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Bemerkungen:

- Für $n = 0$ liefert die obige Formel die Cauchysche Integralformel für f.

Bemerkungen:

- Für $n = 0$ liefert die obige Formel die Cauchysche Integralformel für f.
- Es gilt der Grundsatz einmal holomorph, immer holomorph:
  Eine analytische Funktion f lässt sich in ihrem Definitionsbereich beliebig oft differenzieren.
  Oder: Ist f in G komplex diff'bar, so existieren alle Ableitungen $f^{(n)}$ in G $(n = 1, 2, \ldots)$.

Erinnerung

Folgerung des Cauchyschen Integralsatzes

Cauchysche Integralformel für Ableitungen

Komplexe Funktionen

Anwendungen der Cauchyschen Integralformel

Konstruktion von Stammfunktionen

Cauchysche Integralformel

Zweifach zusammenhängende Gebiete