Komplexe Funktionen

28.05.2018

J. Behrens

① Beispiel

- Betrachte: $\int_\Gamma z \, dz$ mit Γ Einheitskreis, einmal im positiven Orientierungssinn durchlaufen.
- Verwende Zerlegung: sei $q := e^{\frac{2\pi i}{n}}$ dann definiere

$$z_k = q^k \qquad 0 \leq k \leq n \, , \; k \in \mathbb{Z} \qquad (n+1 \text{ Punkte})$$

$$\zeta_k = z_k$$

- n-te Partialsumme:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_n) \, \Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1} z_k (z_{k+1} - z_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} q^k (q^{k+1} - q^k) = (q-1) \sum_{k=0}^{n-1} q^{2k}$$

$$= (q-1) \sum_{k=0}^{n-1} (q^2)^k$$

$$\Rightarrow S_n = (q-1) \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1} = \frac{q^{2n} - 1}{(q+1)}$$

- Auswertung: wegen $q^{2n} = e^{4\pi i} = 1$

$$\Rightarrow \quad S_n = 0 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \quad \int_\Gamma z\, dz = 0$$

(2) Komplexes Integral:

- Voraussetzungen: $f: D \to W \subset \mathbb{C}$

$\Gamma: t \mapsto z(t) = x(t) + i y(t) \qquad t \in [\alpha, \beta]$

$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$

$z_0 = z(t_0), \dots, z_n = z(t_n)$

$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k, \quad \Delta z_k = z_{k+1} - z_k \quad (k = 0, \dots, n-1)$

- Es gilt: $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k = z(t_{k+1}) - z(t_k)$

$$= \{x(t_{k+1}) - x(t_k)\} + i\,[y(t_{k+1}) - y(t_k)]$$

$$= [x'(t_k) + i\, y'(t_k)]\,\Delta t_k + \phi_k$$

$$= z'(t_k)\,\Delta t_k + \phi_k$$

mit $\lim_{n \to \infty} \frac{\phi_k}{\Delta t_k} = 0$ für $k = 0, \dots, n-1$

- Partialsumme: mit $\zeta_k = z(t_k) = z_k$ erhalten wir

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\,\Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(z(t_k))\,[z'(t_k)\,\Delta t_k + \phi_k]$$

- Grenzübergang:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt$$

③ Beispiel:

- Betrachte wieder $\int_\Gamma z\,dz$ mit Γ einfach positiv durchlaufener Einheitskreis
- Parametrisierung: $\Gamma: t \mapsto z(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$
- Substitution: $dz = z'(t)\,dt = i e^{it}\,dt$
- Integral: $\int_\Gamma z\,dz = \int_0^{2\pi} e^{it}\, i e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} e^{2it}\,dt$

$$= \frac{1}{2} e^{2it}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(e^{4\pi i} - e^0\right) = 0$$

④ Beweis Cauchyscher Integralsatz:

- $\Gamma \subset G$ geschlossen, $\Gamma: t \mapsto z(t)$, $(\alpha \leq t \leq \beta)$

$$\Rightarrow \int_\Gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\, z'(t)\, dt$$

- Mit $z(t) = x(t) + i y(t)$ folgt:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta [u(z(t)) + i v(z(t))][x'(t) + i y'(t)]\, dt$$
$$= \int_\alpha^\beta [u(z(t))x'(t) - v(z(t))y'(t)]\, dt$$
$$+ i \int_\alpha^\beta [v(z(t))x'(t) + u(z(t))y'(t)]\, dt$$

- Also $\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma (u\,dx - v\,dy) + i \int_\Gamma (v\,dx + u\,dy)$

Darstellung durch reelle Kurvenintegrale

- Zeige: die reellen Integrale verschwinden!
- o.E. Γ einfach geschlossen positiv orientiert.
- Greenscher Satz (Ana III) für Vektorfeld $\vec{p} = (u, -v)$:

$$\int_\Gamma (u\,dx - v\,dy) = \int_\Omega \operatorname{rot}(\vec{p})\, dx\,dy$$ Ω ist das von Γ eingeschlossene Gebiet

- Nun gilt: $\operatorname{rot}(\vec{p}) = \frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -v_x - u_y$
- f analytisch $\Rightarrow$ Cauchy-Riemannsche DGL gilt: $u_y = -v_x$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{rot}(\vec{p}) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} (u\,dx - v\,dy) = \int_{\Omega} \mathrm{rot}(\vec{p})\,dx\,dy = 0$$

- Analog für $\int_{\Gamma} (v\,dx + u\,dy) = 0$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0 \qquad \boxtimes$$